فصل



آمار توصیفی

❖ اهداف آموزشی

- ❖ آشنایی با مفاهیم پارامترهای مرکزی
- ❖ محاسبه پارامترهای مرکزی
- ❖ آشنایی با مفاهیم پارامترهای پراکندگی
- ❖ محاسبه پارامترهای پراکندگی

⊡ توصیف عددی داده‌ها

در این رویکرد توابعی روی مشاهدات نمونه تعریف می‌شود تا توسط آن توابع، خواص نمونه توصیف گردد. توصیف عددی داده‌ها در سه بخش اصلی مطالعه می‌گردد:

۱- پارامترهای مرکزی؛

۲- پارامترهای پراکندگی؛

۳- پارامترهای انحراف از قرینگی.

⊡ پارامترهای مرکزی

دسته‌ای از شاخص‌ها هستند که بیان‌کننده مکان تمرکز داده‌ها هستند. اصلی‌ترین آنها میانگین است. اگر داده‌ها بر روی محور به طور منظم ردیف شوند مقدار میانگین دقیقاً در نقطه تعادل یا در مرکز ثقل توزیع قرار می‌گیرد. پارامترهای مرکزی با توجه به نوع صفت اندازه‌گیری شده در جامعه انواعی دارند:

- ❖ میانگین حسابی؛
- ❖ میانگین هارمونیک؛
- ❖ میانگین هندسی؛
- ❖ میانه؛
- ❖ مد؛
- ❖ چندک.

❐ میانگین حسابی

■ میانگین در داده‌های دسته‌بندی نشده

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_N$ اعضای یک جامعه آماری N تایی باشند آنگاه میانگین حسابی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

مثال: نمره درس آمار ۵ دانشجو به شرح ۱۳ ، ۱۸ ، ۱۴ ، ۱۵ ، ۱۰ می‌باشد. میانگین حسابی این مشاهدات را به دست آورید.

حل:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{۱۳+۱۸+۱۴+۱۵+۱۰}{۵} = \frac{۷۰}{۵} = ۱۴$$

میانگین حسابی این مشاهدات درصورتی‌که مشاهدات دارای فراوانی مطلق (F_i) باشد، میانگین حسابی به‌قرار زیر است:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{N}$$

مثال: میانگین حسابی مشاهدات زیر را به دست آورید.

نمره (x_i)	۱۲	۱۰	۶	۵	۱۵
تکرار (F_i)	۶	۵	۳	۴	۴

حل:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{N} = \frac{(۴\times۱۵)+(۴\times۵)+(۳\times۶)+(۵\times۱۰)+(۶\times۱۲)}{۲۲} = \frac{۲۲۰}{۲۲} = ۱۰$$

■ میانگین در داده‌های دسته‌بندی شده

اگر داده‌ها به صورت دسته‌بندی شده باشند از نشان دسته جهت به دست آوردن میانگین استفاده می‌کنیم.

$$\text{نشان دسته} = \frac{\text{حد پایین} + \text{حد بالا}}{۲}$$

یادآوری: فراوانی مطلق (F_i) یک دسته تعداد اعضای دسته را نشان می‌دهد و فراوانی نسبی (f_i) هر دسته، نسبت عضوهای آن دسته به مجموع فراوانی‌هاست.

نکته: با داشتن فراوانی نسبی میانیگن از فرمول $\mu = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ به دست می‌آید.

مثال: در داده‌های دسته‌بندی شده زیر میانگین را به دست آورید.

طبقه	۰-۲۰	۲۰-۴۰	۴۰-۶۰	۶۰-۸۰	۸۰-۱۰۰
F_i	۵	۱۰	۱۰	۲۰	۵

حل: ابتدا نشان هر دسته را به دست می‌آوریم:

طبقه	۰-۲۰	۲۰-۴۰	۴۰-۶۰	۶۰-۸۰	۸۰-۱۰۰
نشان دسته	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{N} = \frac{(5\times10)+(10\times30)+(10\times50)+(20\times70)+(5\times90)}{50} = \frac{2700}{50} = 54$$

مثال: در داده‌های دسته‌بندی شده زیر میانگین را به دست آورید.

طبقه	۰-۲۰	۲۰-۴۰	۴۰-۶۰	۶۰-۸۰	۸۰-۱۰۰
f_i	۰/۱	۰/۲	۰/۲	۰/۴	۰/۱

حل: ابتدا نشان هر دسته را به دست می‌آوریم:

طبقه	۰-۲۰	۲۰-۴۰	۴۰-۶۰	۶۰-۸۰	۸۰-۱۰۰
نشان دسته	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = (0/1\times10)+(0/2\times30)+(0/2\times50)+(0/4\times70)+(0/1\times90) = 54$$

نکته: اگر داده‌ها تشکیل تصاعد حسابی بدهند، میانگین آنها برابر نصف حاصل‌جمع اولین و آخرین داده است.

■ چند خاصیت از میانگین حسابی

خاصیت ۱) مجموع تفاضل هر یک از داده‌ها از میانگین برابر صفر است.

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)=0$$

اثبات:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)=\sum_{i=1}^{N}x_i-\sum_{i=1}^{N}\mu=N\mu-N\mu=0$$

خاصیت ۲) اگر به همه مشاهدات عددی اضافه شود آن عدد به میانگین‌های عدد اضافه می‌شود.

$$y_i=x_i+a \Rightarrow \mu_y=\mu_x+a$$

اثبات:

$$\mu_y=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+a)}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}a}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{N}+\frac{\sum_{i=1}^{n}a}{N}=\mu_x+\frac{Na}{N}=\mu_x+a$$

نتیجه ۱) اگر از همه مشاهدات عددی کم شود آن عدد از میانگین‌های عدد کم می‌شود.

$$y_i=x_i-a \Rightarrow \mu_y=\mu_x-a$$

خاصیت ۳) اگر همه مشاهدات در عددی ضرب شوند، میانگین در آن عدد ضرب می‌شود.

$$y_i=bx_i \Rightarrow \mu_y=b\mu_x$$

اثبات:

$$\mu_y=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n}bx_i}{N}=\frac{b\sum_{i=1}^{n}x_i}{N}=b\mu_x$$

نتیجه ۲) اگر همه مشاهدات در عددی غیرصفر تقسیم شوند، میانگین در آن عدد تقسیم می‌شود.

$$y_i=\frac{x_i}{b} \Rightarrow \mu_y=\frac{\mu_x}{b}$$

خاصیت ۴) در هر جامعه آماری مقدار عبارت $\sum_{1}^{n}(x_i-\mu)^2$ همواره کمترین مقدار را دارد.

خاصیت ۵) میانگین تنها پارامتری است که اگر به جای تمام داده‌ها قرار گیرد مجموع داده‌ها تغییر نمی‌کند.

❐ میانگین پیراسته[1]

در برخی از جوامع آماری تعدادی از مشاهدات با بقیه داده‌ها همخوانی و تجانس ندارند یعنی به طور غیرعادی بزرگ یا کوچک هستند که خود باعث تأثیر نامطلوب بر میانگین جامعه می‌شوند در این مواقع مشاهدات نامطلوب را حذف کرده و از بقیه میانگین پیراسته می‌گیریم.

۱- داده‌ها را به صورت صعودی مرتب کنید.

۲- مشاهدات نامطلوب (کوچکتر از a درصد پایین و بزرگتر از a درصد بالا) حذف شوند.

۳- میانگین مشاهدات باقیمانده را بگیرید.

نکته: در توزیع‌های متقارن این شاخص تقریباً به خوبی میانگین حسابی است اما در صورت وجود مقادیر ناهمگون میانگین پیراسته بهتر از میانگین حسابی است، وقتی منحنی توزیع دنباله کشیده داشته باشد این شاخص بهتر از شاخص‌های میانگین حسابی است.

مثال: درآمد ۹ راننده در هر روز به شرح زیر است:

۹۳, ۱۰۶, ۱۰۵, ۱۲۵, ۱۲۸, ۱۳۲, ۱۳۶, ۱۶۶, ۳۵۲

میانگین پیراسته درآمد افراد درصورتی‌که ٪۲۵= a باشد را حساب کنید.

حل:

۹۳, ۱۰۵, ۱۰۶, ۱۲۵, ۱۲۸, ۱۳۲, ۱۳۶, ۱۶۶, ۳۵۲

$$\frac{۲۵}{۱۰۰}\times ۹ = ۲/۲۵ \cong ۲$$

۱۰۶, ۱۲۵, ۱۲۸, ۱۳۲, ۱۳۶

$$\mu = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{N} = \frac{۶۱۲}{۵} = ۱۲۲/۴$$

❐ میانگین وینزوری

در صورتی است که به جای حذف a درصد پایین یا بالای مشاهدات به ترتیب کوچکترین و بزرگترین مشاهده را جایگزین نموده و سپس میانگین گرفته شود، میانگین وینزوری به دست می‌آید.

---

1. Trimmed Mean

مثال: در مثال بالا میانگین وینزوری را محاسبه کنید.

حل:

۱۰۶, ۱۰۶, ۱۰۶, ۱۲۵, ۱۲۸, ۱۳۲, ۱۳۶, ۱۳۶, ۱۳۶

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{۶۱۲}{۹} = ۱۲۱/۷$$

❐ میانگین هارمونیک

چنانچه مشاهدات جمع‌آوری شده از مقیاس ترکیبی مثل کیلومتر در ساعت، دور در ثانیه، نفر در ساعت و ... برخوردار باشد از میانگین هارمونیک استفاده می‌شود که برابر است با عکس میانگین حسابی معکوس داده‌ها.

$$\mu_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

و چنانچه داده‌ها دارای فراوانی باشند میانگین هارمونیک از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\mu_H = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{x_i}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{x_i}}$$

مثال: راننده‌ای مسافت تهران– مشهد را با سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت طی می‌کند و همین مسیر را با سرعت ۱۱۵ کیلومتر در ساعت بر می‌گردد. متوسط سرعت چیست؟

حل:

$$\mu_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{۲}{\frac{1}{۱۰۰} + \frac{1}{۱۱۵}} \cong ۱۰۷$$

مثال: سرعت ۳۰ ماشین بر حسب دور بر ثانیه به شرح زیر است، میانگین سرعت این ۳۰ ماشین را محاسبه کنید.

سرعت (x_i)	۵	۶	۱۸	۸
تعداد (F_i)	۶	۱۰	۱۰	۵

حل:

$$\mu_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{x_i}} = \frac{۲۹}{\frac{۶}{۵} + \frac{۱۰}{۶} + \frac{۱۸}{۱۰} + \frac{۵}{۸}} = ۶/۷۶$$

❐ میانگین هندسی

برای محاسبه میانگین اندازه‌های نسبی همانند نسبت‌ها، درصدها، نرخ‌های رشد و شاخص‌ها از میانگین هندسی استفاده می‌شود.

$$\mu_G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$$

و چنانچه داده‌ها دارای فراوانی باشند میانگین هندسی از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\mu_G = \sqrt[\sum F_i]{\prod_{i=1}^{N} x_i^{F_i}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i^{F_i}}$$

مثال: نسبت سود شرکتی در سال ۶۷ به سال ۶۶ برابر ۳ و سال ۶۸ به ۶۷ برابر ۲ و سال ۶۹ به ۶۸ برابر ۴/۵ است. میانگین هندسی نسبت‌های سود را به دست آورید.

حل:

$$\mu_G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i} = \sqrt[۳]{۳ \times ۲ \times ۴/۵} = ۳$$

مثال: درصد کارایی ۲۰ معلم در جدول آمده است. میانگین درصد کارایی را محاسبه کنید.

درصد کارایی (x_i)	۵۵	۶۵	۸۰	۸۸
تعداد (F_i)	۲	۷	۵	۶

حل:

$$\mu_G = \sqrt[\sum F_i]{\prod_{i=1}^{N} x_i^{F_i}} = \sqrt[۲۰]{۸۸^۶ \times ۸۰^۵ \times ۶۵^۷ \times ۵۵^۲} = ۷۳/۷۴$$

مثال: قیمت کالایی که در ۶ ماه متوالی تغییر کرده به شرح زیر است. متوسط نرخ رشد قیمت ماهانه این کالا چقدر است؟

ماه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
قیمت	۱۰۰	۱۲۰	۱۴۵	۱۸۰	۲۲۰	۲۶۰

حل:

ماه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
نرخ رشد	-	۱/۲۰	۱/۲۱	۱/۲۴	۱/۲۲	۱/۱۸

$$\mu_G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} X_i} = \sqrt[5]{1/2 \times 1/21 \times 1/24 \times 1/18} = 1/85$$

$1/85 - 1 = 0/85 = 85\%$چون میانگین هندسی ۱/۸۵ برابر شده بنابراین ۸۵ درصد رشد داشته است.

مثال: تعداد کارکنان کارخانه‌ای طی چهار سال متوالی ۱۹۰، ۱۸۰، ۱۶۰، ۱۵۰ بوده است. متوسط رشد سالانه تعداد کارکنان چند درصد است؟

حل:

$$\mu_G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} X_i} = \sqrt[3]{\frac{190}{180} \times \frac{180}{170} \times \frac{170}{160}} = 1/08$$

$1/08 - 1 = 0/08 = 8\%$چون میانگین هندسی ۱/۰۸ برابر شده بنابراین ۸ درصد رشد داشته است.

نکته: اگر در بین داده‌ها عدد صفر و یا منفی وجود داشته باشد نمی‌توان میانگین هندسی را حساب کرد.

مثال: میانگین حسابی دو عدد مثبت ۱۳ و میانگین هندسی آنها ۱۲ است. آن دو عدد را پیدا کرده و میانگین هارمونیک آنها را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = 13 \Rightarrow x_1 + x_2 = 26 \\ \sqrt{x_1 \times x_2} = 12 \Rightarrow x_1 \times x_2 = 144 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 18 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\mu_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}} = \frac{2}{\frac{1}{8} + \frac{1}{18}} = 11/07$$

نکته: بین میانگین هندسی، حسابی، هارمونیک همواره روابط زیر برقرار است.

۱) $\mu_H \le \mu_G \le \mu$ ۲) $\mu_H \times \mu = \mu^2_G$

❐ میانه

میانه نمونه، شاخصی است که نمونه را به دو نیمه مساوی تقسیم می‌کند. به طوری که حداقل نیمی از داده‌ها بزرگتر یا مساوی آن و نیمی کوچکتر یا مساوی آن باشند.

نکته: در توزیع‌های نامتقارن از میانه به عنوان شاخص مرکزی استفاده می‌شود. چون میانه کمتر تحت تأثیر مقادیر واقع‌شده در انتهای توزیع، قرار می‌گیرد.

نتیجه: اگر در بین داده‌ها عددی وجود داشته باشد که اختلاف آن با بقیه زیاد باشد از میانه به عنوان شاخص مرکزی استفاده می‌شود.

الف) اگر مشاهدات گسسته باشند:

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم، اگر تعداد داده‌ها فرد باشد عدد وسط میانه است؛ و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد میانگین دو عدد وسط میانه است.

مشاهده $x_{[i]}$ مرتب شده iام

$$md = \begin{cases} x_{\left[\frac{N+1}{2}\right]} & N \text{ فرد} \\ \frac{x_{\left[\frac{N}{2}\right]} + x_{\left[\frac{N}{2}+1\right]}}{2} & N \text{ زوج} \end{cases}$$

مثال: میانه اعداد ۲ ، ۸ ، ۱- ، ۵ ، ۱ ، ۳ ، ۴ را به دست آورید.

حل:

$$x_{\left[\frac{۷+۱}{۲}\right]} = x_۴ = ۳$$

۸ ، ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱ ، ۱-

ب) اگر مشاهدات پیوسته باشند (به صورت طبقه‌ای باشند:

۱- ابتدا مقدار $\frac{N}{۲}$ را محاسبه کنید. (N تعداد کل مشاهدات)

۲- اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن از $\frac{N}{۲}$ بزرگتر یا مساوی است را طبقه میانه‌دار نام‌گـذاری کنید.

۳- با استفاده از رابطه زیر میانه را به دست آورید.

$$md = l + \left(\frac{\frac{N}{۲} - FC_{i-۱}}{FC_i} \right) h$$

که در آن l: کران پایین طبقه میانه h: طول طبقه میانه

$FC_{i-۱}$: فراوانی تجمعی طبقه ماقبل طبقه میانه‌دار FC_i: فراوانی تجمعی طبقه میانه‌دار

مثال: توزیع فراوانی قد دانشجویان به‌قرار زیر است، میانه قد را به دست آورید.

طبقه	۱۵۵-۱۶۰	۱۶۰-۱۶۵	۱۶۵-۱۷۰	۱۶۵-۱۷۰	۱۷۰-۱۷۵	۱۷۵-۱۸۰	۱۸۰-۱۹۰
F_i	۶	۲۰	۱۵	۱۵	۱۰	۶	۳
Fc_i	۶	۲۶	۴۱	۴۱	۵۱	۵۷	۶۰

حل:

ابتدا طبقه میانه‌دار را پیدا می‌کنیم $\frac{N}{۲} = \frac{۶۰}{۲} = ۳۰$ بنابراین طبقه میانه‌دار طبقه سوم است.

$$md = l + \left(\frac{\frac{N}{۲} - FC_{i-۱}}{FC_i} \right) h = ۱۶۵ + \left(\frac{۳۰ - ۲۶}{۱۵} \right) ۵ = ۱۶۶/۳۳$$

نکته: در صورتی که که جدول دارای طبقات گسسته باشد ابتدا آن را به طبقات پیوسته تبدیل می‌کنیم و برای این کار ۰/۵ واحد از حد پایین را کم و ۰/۵ واحد را به حد بالای هر دسته اضافه می‌کنیم؛ سپس میانه را محاسبه می‌کنیم.

مثال: میانه اعداد زیر را به دست آورید.

طبقه	۲-۵	۶-۹	۱۰-۱۳	۱۴-۱۷
F_i	۷	۱۵	۱۰	۸

حل: جدول دارای طبقات گسسته است ابتدا آن را به طبقات پیوسته تبدیل می‌کنیم:

طبقه	۱/۵-۵/۵	۵/۵-۹/۵	۹/۵-۱۳/۵	۱۳/۵-۱۷/۵
F_i	۷	۱۵	۱۰	۸
FC_i	۷	۲۲	۳۲	۴۰

سپس طبقه میانه‌دار را پیدا می‌کنیم $\frac{N}{۲}=\frac{۴۰}{۲}=۲۰$ بنابراین طبقه میانه‌دار طبقه دوم است.

$$md = l + \left(\frac{\frac{N}{۲} - FC_{i-۱}}{FC_i} \right) h = ۵/۵ + \left(\frac{۲۰-۷}{۱۵} \right) ۴ = ۸/۹۶$$

خواص میانه:

الف) در هر جامعه آماری یک میانه وجود دارد.

ب) بر خلاف میانگین، میانه از اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک متأثر نمی‌شود.

خاصیت مهم میانه:

C یک عدد دلخواه

$$\sum_{i=۱}^{N} |x_i - md| \le \sum_{i=۱}^{N} |x_i - c|$$

یعنی $\sum_{i=۱}^{N} |x_i - md|$ حداقل است. یا میانه حاصل جمع قدر مطلق تفاضل‌های مقادیر خود را به حداقل می‌رساند. از این خاصیت میانه برای طرح‌ریزی (استقرار) خطوط راه‌آهن برقی شهرها، اتوبوس، تعیین ایستگاه‌ها، محل پمپ‌بنزین‌ها، محل بیمارستان‌ها و... می‌توان استفاده نمود.

نکته: چنانچه اعدادی که در ابتدا و انتهای توزیع واقع شده‌اند، از سایر اعداد به طور قابل‌ملاحظه‌ای تفاوت داشته باشند، بهتر است از میانه به عنوان پارامتر مرکزی استفاده کنیم؛ زیرا میانگین از حد وسط واقعی دور است و میانه تحت‌تأثیر داده‌های پرت قرار نمی‌گیرد.

❐ مد (نما)

وقتی مشاهدات از نوع اسمی (مثل زن و مرد و...) باشند، نمی‌توان از میانگین‌ها یا میانه استفاده نمود اما می‌توان مشاهده‌ای که دارای بیشترین فراوانی یا تکرار باشد (مد) را مشخص نمود.

الف) اگر مشاهدات به صورت طبقه‌ای نباشد:

در این حالت مشاهده‌ای که دارای بیشترین فراوانی یا تکرار باشد مد را مشخص نمود.

مثال: داده‌های زیر نمرات درس آمار هستند مد را در این داده‌ها پیدا کنید.

۲۰، ۱۸، ۱۲، ۱۶، ۸، ۱۵، ۱۱، ۱۷، ۱۶، ۱۵، ۷، ۱۹، ۱۷، ۱۶، ۲۰، ۱۸، ۱۲، ۱۶، ۸، ۱۵، ۱۱

حل:

مد ۱۶ است زیرا ۴ بار تکرار شده است.

ب) اگر مشاهدات به صورت طبقه‌ای باشد:

۱- طبقه‌ای که دارای بیشترین فراوانی است را تحت عنوان طبقه مُددار در نظر می‌گیریم.

۲- از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$mo = l + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) h$$

l: کران پایین طبقه مُددار h: طول طبقه

d_1: تفاضل فراوانی‌های طبقه مددار و طبقه قبل از آن

d_2: تفاضل فراوانی‌های طبقه مددار و طبقه بعد از آن.

مثال: داده‌های طبقه‌بندی‌شده زیر را در نظر بگیرید مقدار مد را در این داده‌ها پیدا کنید.

طبقه	۰-۱۰	۱۰-۲۰	۲۰-۳۰
F_i	۱۰	۳۰	۲۰

حل: طبق دوم (۲۰-۱۰) طبقه مددار است بنابراین $d_1 = ۲۰,\ d_2 = ۱۰$

$$mo = l + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)h = ۱۰ + \left(\frac{۲۰}{۲۰+۱۰}\right)۱۰ = ۱۶/۶$$

نکته: میانه در مقایسه با مد اطلاعات بیشتر و مفیدتری را در زمینه اندازه تمایل به مرکز هر نوع توزیع ارائه می‌دهد. به‌طور کلی از میانه به عنوان اندازه تمایل به مرکز توزیع‌هایی که شکل آنها نامتقارن است استفاده می‌شود، زیرا میانه کمتر تحت تأثیر مقادیر واقع‌شده، در انتهای توزیع قرار می‌گیرد.

نکته: مد منحصر به فرد نیست.

نکته: برای داده‌های کیفی تنها شاخص مرکزی قابل مقایسه مد است.

❐ چندک

چندک‌ها مقادیری از مشاهدات هستند که دامنه تغییرات را در فواصل چندکی تقسیم می‌کنند. به طوری که فراوانی‌ها در هریک از این فواصل درصد معینی از فراوانی کل را تشکیل می‌دهد.

چارک: دامنه تغییرات را به ۴ قسمت تقسیم می‌کند.

دهک: دامنه تغییرات را به ۱۰ قسمت تقسیم می‌کند.

صدک: دامنه تغییرات را به ۱۰۰ قسمت تقسیم می‌کند.

چندک Kام شاخصی است که در اصطلاح، K چندم داده‌ها کوچکتر یا مساوی آن هستند؛ مثلاً چارک iام چندکی است که iچهارم مشاهدات کوچکتر یا مساوی آن باشد.

چندک‌ها لزوماً بیان‌کننده مکان تمرکز مشاهدات نیستند بلکه مکانی از توزیع را نشان می‌دهند که کسری از مشاهدات کوچکتر یا مساوی آن هستند.

روش محاسبه چندک:

الف) داده‌های طبقه‌بندی نشده:

مشاهدات را به صورت صعودی مرتب کرده و مشاهده مرتب شده iام را x_i نامگذاری می‌کنیم.

با توجه به نوع چندک محل آن را با استفاده از فرمول‌های زیر پیدا می‌کنیم.

چارک	$\frac{aN}{۴}+\frac{۱}{۲}$	$a: ۱,۲,۳$
دهک	$\frac{aN}{۱۰}+\frac{۱}{۲}$	$a: ۱,۲,\ldots,۹$
صدک	$\frac{aN}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}$	$a: ۱,۲,\ldots,۹۹$

مثال: چارک اول، دوم و سوم مشاهدات زیر را تعیین کنید.

۴۰ , ۶۰ , ۸۰ , ۷۰ , ۸۵ , ۷۵ , ۱۰۰ , ۷۰ , ۶۰ , ۵۰ , ۹۰ , ۸۰

حل:

۴۰ , ۵۰ , ۶۰ , ۶۰ , ۷۰ , ۷۰ , ۷۵ , ۸۰ , ۸۰ , ۸۵ , ۹۰ , ۱۰۰

$$\text{محل چارک اول} = \frac{۱\times۱۲}{۴}+\frac{۱}{۲}=۳/۵ \Rightarrow \text{چارک اول} = ۶۰+۰/۵(۶۰-۶۰)=۶۰$$

$$\text{محل چارک دوم} = \frac{۲\times۱۲}{۴}+\frac{۱}{۲}=۶/۵ \Rightarrow \text{چارک دوم} = ۷۰+۰/۵(۷۵-۷۰)=۷۲/۵$$

$$\text{محل چارک سوم} = \frac{۳\times۱۲}{۴}+\frac{۱}{۲}=۹/۵ \Rightarrow \text{چارک سوم} = ۸۰+۰/۵(۸۵-۸۰)=۸۲/۵$$

نکته: چارک دوم، دهک پنجم، صدک پنجاهم با میانه برابرند.

ب) داده‌های طبقه‌بندی‌شده:

در این حالت ابتدا با استفاده از روابط $\frac{aN}{۴}$ برای چارک، $\frac{aN}{۱۰}$ برای دهک، $\frac{aN}{۱۰۰}$ برای صدک) اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی‌اش بیشتر یا مساوی یکی از مقادیر فوق باشد را با توجه به چارک، دهک، صدک پیدا می‌کنیم؛ سپس با استفاده از فرمول‌های زیر چارک، دهک، صدک aام را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{چارک } a\text{ام} = l+\left(\frac{\frac{aN}{۴}-FC_{i-۱}}{FC_i}\right)h \qquad a:۱,۲,۳$$

l: کران پایین طبقه چارک‌دار $\qquad$ h: طول طبقه

$FC_{i-۱}$: فراوانی تجمعی طبقه ماقبل طبقه چارک‌دار $\qquad$ FC_i: فراوانی تجمعی طبقه چارک‌دار

$$\text{دهک } a\text{ام} = l+\left(\frac{\frac{aN}{۱۰}-FC_{i-۱}}{FC_i}\right)h \qquad a:۱,۲,\ldots,۹$$

l: کران پایین طبقه دهک‌دار $\qquad$ h: طول طبقه

FC_{i-1}: فراوانی تجمعی طبقه ماقبل طبقه دهک‌دار FC_i: فراوانی تجمعی طبقه دهک‌دار

$$\text{صدک } a\text{ام} = l + \left(\frac{\frac{aN}{100} - FC_{i-1}}{FC_i} \right) h \qquad a : 1, 2, \ldots, 99$$

l: کران پایین طبقه صدک‌دار h: طول طبقه

FC_{i-1}: فراوانی تجمعی طبقه ماقبل طبقه صدک‌دار FC_i: فراوانی تجمعی طبقه صدک‌دار

مثال: چارک‌های اول، دوم و سوم جدول زیر را به دست آورید.

طبقه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
طبقات	۱۸-۲۰	۲۰-۲۲	۲۲-۲۴	۲۴-۲۶	۲۶-۲۸	۲۸-۳۰	۳۰-۳۲	۳۲-۴۳	۳۴-۳۶	۳۶-۳۸	۳۸-۴۰
F_i	۲	۲	۳	۵	۷	۸	۸	۶	۴	۳	۲
FC_i	۲	۴	۷	۱۲	۱۹	۲۷	۳۵	۴۱	۴۵	۴۸	۵۰

حل:

$$\text{اول } \frac{N}{4} : \frac{1\times 50}{4} = 12/5 \quad \text{طبقه پنجم} \Rightarrow \text{چارک اول} = 26 + \left(\frac{\frac{1\times 50}{4} - 12}{7} \right) 2 = 26/143$$

$$\text{دوم } \frac{N}{4} : \frac{2\times 50}{4} = 25 \quad \text{طبقه ششم} \Rightarrow \text{چارک دوم} = 26 + \left(\frac{\frac{2\times 50}{4} - 19}{8} \right) 2 = 29/5$$

$$\text{سوم } \frac{N}{4} : \frac{3\times 50}{4} = 37/5 \quad \text{طبقه هشتم} \Rightarrow \text{چارک سوم} = 26 + \left(\frac{\frac{3\times 50}{4} - 35}{6} \right) 2 = 32/83$$

تمرین: در جاده‌ای به طول ۱۰۰ کیلومتر ۲۰۰ گاراژ وجود دارد. فاصله گاراژها بر حسب کیلومتر به‌قرار زیر است:

فاصله تا گاراژ	۷	۲۶	۲۸	۳۷	۴۰	۴۶	۶۰	۷۸	۸۶	۹۲
تعداد گاراژ	۱۰	۱۵	۵	۲۰	۵	۲۵	۱۵	۳۰	۱۰	۶۵