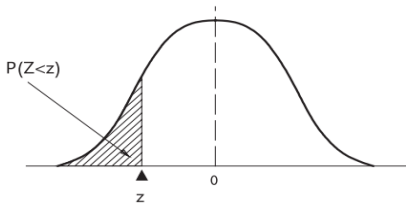
$$P(-۱ \le z \le ۱) = \int_{-۱}^{+۱} f(z)\,dz = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-۱}^{+۱} \exp\left(-\frac{z^۲}{۲}\right) dz$$

انتگرال فوق به کمک داده‌های ارائه شده در جدول محاسبه می‌شود:

$$P(-۱ \le z \le ۱) = P(z \le ۱) - P(z \le -۱) = ۰/۸۴ - ۰/۱۶ = ۰/۶۸$$



$$P(Z \le z) = \int_{-\alpha}^{z} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\left(-\frac{y^۲}{۲}\right) dy$$

بخشی از جدول مربوط به توزیع نرمال استاندارد

z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.9
–3.0	0.0013						
–2.0	0.0228	0.179	0.0139	0.0107	0.0082	0.0062	0.0019
–1.0	0.1587	0.1357	0.1151	0.0968	0.0808	0.0668	0.0287
–0.0	0.500	0.4602	0.4207	0.3821	0.3446	0.3085	0.1841
+0.0	0.500	0.5398	0.5793	0.6179	0.6554	0.6915	0.8159
+1.0	0.8413	0.8643	0.8849	0.9032	0.9192	0.9332	0.9713
+2.0	0.9772	0.9821	0.9893	0.9893	0.9918	0.9938	0.9981
+3.0	0.9987						

مثال: جمعیت نرمالی با $\mu = ۶$ و $\sigma^۲ = ۴$ داریم. چه درصدی از جمعیت مقداری بزرگ‌تر از ۹ دارند؟

$$z = (۹-۶)/۲ = ۱/۵ \rightarrow P(z < ۱/۵) = ۰/۹۳ \rightarrow P(z > ۱/۵) = ۱ - P(z < ۱/۵) = ۰/۰۷$$

یعنی ۰/۰۷جمعیت بزرگ‌تر از ۹ هستند.

⊡ استنتاج آماری

پس از جمع‌آوری داده‌های تجربی ← استفاده از آنها برای دست‌یابی به نتیجه‌ای از جمعیت پایه مثلاً از داده‌های حاصل از یک راکتور می‌خواهیم ببینیم که:

آیا بازدهی متوسط چند اجرای در شرایط عملیاتی ثابت، منطبق با عوامل اقتصادی است؟
آیا یک اجرای در شرایط عملیاتی مفروض منجر به بازدهی بیشتر می‌شود؟
آیا می‌توان معادله‌ای برای پیش‌بینی بازدهی در شرایط عملیاتی مختلف ارائه داد؟
وجود روش‌های مختلف برای استنتاج آماری
وجود خطاهای آزمایشگاهی ← امکان عدم تطابق کامل داده‌ها با مدل به دست آمده

نتیجه‌گیری تنها در محدوده‌ای مشخص از قطعیت[1] معتبر است.

استنتاج آماری را می‌توان در کلیت به دو دسته کلی تقسیم‌بندی نمود:

آزمون فرضیه[2]: در نظر گرفتن فرضیه‌ای در مورد جمعیت و سپس اعتبارسنجی آن با استفاده از یک آزمون روی داده‌های نمونه ← تأیید یا رد

مثلاً؛ در مثال پیشین فرض می‌کنیم که بازدهی منطبق با عوامل اقتصادی است و به وسیله نمونه شاهدی آن را تأیید یا رد می‌کنیم.

یا این که فرض می‌کنیم در یک شرایط عملیاتی معین، بازدهی بیشتر است و بعد با اجرا در همان شرایط آن را رد یا تأیید می‌کنیم.

تخمین آماری[3]: مشتمل بر محاسبه مقادیر عددی در مورد پارامترهای مختلف جمعیت (میانگین، واریانس و غیره) است. این مقادیر عددی تنها تخمین‌هایی از پارامترهای حقیقی هستند اما روش‌های آماری به ما این امکان را می‌دهد که درستی (صحت) این تخمین‌ها را تعیین نماییم.

الف) فرضیه‌های آماری[4]

یک فرضیه آماری، عبارتی ساده در خصوص توزیع احتمال یک متغیر تصادفی است.

با بیان فرضیه، از روش‌های آماری برای آزمودن آن استفاده می‌شود ← رد یا تأیید.

پیش از قاعده‌مند (فرموله) کردن فرضیه، همواره لازم است تا مدلی را انتخاب کنیم که فرض بر آن است که این مدل به اندازه کافی و مناسب جمعیت پایه را توصیف می‌کند.

اگر اطلاعات حاصل از نمونه با فرضیه هم‌خوانی داشته باشد، تأیید می‌شود و در غیر این صورت، رد می‌شود.

اساسا دو فرضیه در نظر گرفته می‌شود:

❖ فرضیه اصلی یا فرضیه صفر[1]: H_0

1. Certainty
2. Hypothesis Testing
3. Statistical Estimation
4. Statistical Hypotheses

❖ فرضیه مقابل[2]: H_1

پذیرش فرضیه صفر (H_0)، هم‌ارز رد فرضیه مقابل (H_1) است.

از آن جایی که نمونه‌گیری ساده از یک جمعیت، الزاماً به این معنا نیست که نمونه‌ای کاملاً نماینده (شاخص) به دست آورده‌ایم، **حتما خطاهایی نیز وجود دارند** حتی هنگامی که فرضیه‌ای رد یا تأیید می‌شود.

❐ انواع خطا

به هنگام آزمودن یک فرضیه آماری، می‌توان دو نوع خطا را در کنار احتمال رخداد آنها تعریف نمود.

خطای نوع I: رد فرضیه صفر (H_0) هنگامی که فرضیه‌ای درست است. α را به عنوان احتمال رد H_0 هنگامی که فرضیه‌ای درست است، در نظر بگیرید. این عبارت به عنوان «**سطح معنادار بودن**»[3] آزمون نامیده می‌شود.

خطای نوع II: تأیید H_0 هنگامی که فرضیه‌ای نادرست است (یعنی H_1 فرضیه درست است). β را به عنوان احتمال پذیرش H_0 وقتی که فرضیه‌ای نادرست است، در نظر بگیرید.

می‌توان گفت که α و β ریسک پذیرش فرضیه‌های نادرست هستند.

در حالت ایده‌آل، ترجیح بر کمینه بودن هر دو نوع خطا است. اما، با کاهش α، β افزایش می‌یابد (و بالعکس).

❐ آماره آزمون

برای آزمودن فرضیه، از داده‌های نمونه برای محاسبه یک آماره آزمون استفاده می‌شود.

بسته به مقدار آماره آزمون، فرضیه صفر (H_0) رد یا تأیید می‌شود.

منطقه بحرانی به عنوان بازه‌ای از مقادیر آماره آزمون محسوب می‌شود که H_0 در آن رد می‌شود.

■ روند آزمودن یک فرضیه

یک مدل احتمال و یک متغیر تصادفی مرتبط با آن انتخاب کنید.

---

1. Primary Or Null
2. Alternative
3. Level Of Significance

H_0 و H_1 را قاعده‌مند (فرموله) کنید. این کار باید به دقت انجام شود تا نتیجه‌گیری معنادار باشد.
آماره آزمون را مشخص کنید.
سطح معنادار بودن یک آزمون را انتخاب کنید.
توزیع آماره آزمون و منطقه بحرانی مربوط به آماره آزمون را تعیین کنید.
مقدار آماره آزمون را از روی نمونه‌ای تصادفی از داده‌ها محاسبه کنید.
با مقایسه مقدار محاسبه شده آماره آزمون با منطقه بحرانی، H_0 پذیرفته یا رد می‌شود.

مثال: بر اساس مشاهدات در یک کارخانه تولید تایر، ۴/۸٪ تایرها معیوب و از خط تولید حذف می‌شوند. در یکی از روزهای کاری، ۶۰ عدد از ۱۰۰۰ تایر تولیدی از خط کنار گذاشته شدند. آیا هیچ دلیلی مبنی بر تولید نامناسب این واحد تولیدی در این روز به خصوص وجود دارد؟

این مسأله را می‌توان به شکل یک آزمون از مقدار نمونه در نظر گرفت. می‌توان از داده‌های مربوط به عملیات بلند مدت به عنوان تخمینی از پارامتر جمعیت ($p = ۰/۰۴۸$) استفاده نمود زیرا راه دیگری نداریم.

از روش ۷ مرحله‌ای پیروی می‌کنیم:

۱- با یک توزیع دوجمله‌ای سر و کار داریم که دو خروجی دارد؛ پذیرش یا رد. اما از آن جایی که اندازه نمونه بزرگ است، می‌توان از تقریب نرمال استفاده کرد. چون $p = ۰/۰۴۸$ است، میانگین جمعیت برابر با:

$$\mu = np = ۱۰۰۰ \times ۰/۰۴۸ = ۴۸$$

و واریانس آن برابر است با: $\sigma^۲ = np\,(۱-p) = ۱۰۰۰ \times ۰/۰۴۸(۱-۰/۰۴۸) = ۴۵/۷$

۲- فرضیه صفر (اصلی، H_0) به صورت واضح از صورت مسأله مشخص نیست. پس میانگین جمعیت که از روی میانگین نمونه بلند مدت تعیین شده است، به عنوان مبنایی برای مقایسه در نظر گرفته می‌شود:

$$H_0 : \mu \le ۴۸ \qquad H_1 : \mu > ۴۸$$

پس اکنون پرسش این است که آیا میزان رد ۶۰ نمونه در روز، به حدی بالا است که فرضیه H_0 را رد کنیم؟

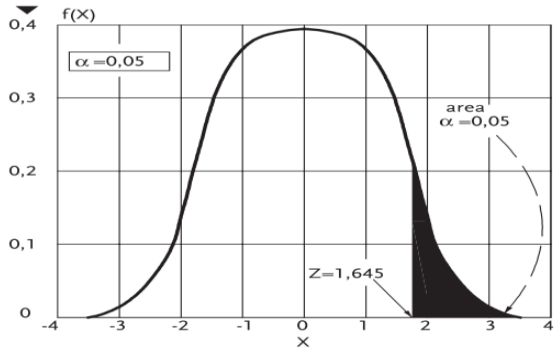
۳- از آن جایی که از تقریب نرمال استفاده می‌کنیم، آماره آزمون متغیر نرمال استاندارد خواهد بود:

$$Z = \frac{X - ۰/۵ - \mu_{۰}}{\sigma}$$

کم کردن عدد ۰/۵ از این مقدار نمونه، سبب بهبود تقریب نرمال می‌شود که به آن «تصحیح پیوستگی»[1] گفته می‌شود. صورت کسر همان انحراف مقدار نمونه از میانگین جمعیت است. مخرج کسر نیز انحراف استاندارد جمعیت است. از این رو Z عدد انحراف استاندارد از میانگین است.

۴- $\alpha = ۰/۰۵$ را در نظر بگیرید. به این معنا که ریسک رد فرضیه درست (که μ = ۴۸ است)، ۱ به ۲۰ است.

۵- برای تعیین منطقه بحرانی، باید بدانیم که توزیع آماره آزمون چیست؟ در این مورد، Z دارای توزیعی مشابه توزیع نرمال استاندارد است. به ازای μ < ۴۸ :H. و α = ۰/۰۵، معین می‌کنیم که منطقه بحرانی ۵٪ سطح منحنی نرمال استاندارد را در بر می‌گیرد.



مقدار Z که برش ۵٪ منحنی به ازای آن رخ می‌دهد، از روی جدول توزیع نرمال (جدول B پیوست کتاب) برابر با ۱/۶۴۵ است. حال اگر Z مورد محاسبه بیشتر از این مقدار شد، H. رد می‌شود.

۶- در این مورد، $\sigma^{۲}$ = ۴۵/۷، X = ۶۰، μ = ۴۸، n = ۱۰۰۰ و $Z = \frac{۶۰ - ۰/۵ - ۴۸}{\sqrt{۴۵/۷}} = ۱/۷۰$ است.

۷- از آن جایی که ۱/۷۰ > ۱/۶۴۵ است، H. رد می‌شود و سطح رد شدن ۶۰ نمونه از ۱۰۰۰ تایر، بسیار بیشتر از سطح رد ۴/۸٪ است. اکنون می‌توان علت این موضوع را با ارزیابی فرایند تولید جستجو نمود.

---

1. Continuity Correction

حال اگر به جای ۶۰ تایر معیوب از ۱۰۰۰ تا، ۶ تایر معیوب از ۱۰۰ وجود داشته باشد، حل مسأله به شکل زیر خواهد بود:

$$Z = \frac{۶ - ۰/۵ - ۴/۸}{\sqrt{۴/۵۷}} = ۰/۳۲۷ \qquad \alpha = ۰/۰۵$$

در این حالت ۰/۳۲۷ < ۱/۶۴۵ است، .H پذیرفته می‌شود. معیوب بودن ۶ تایر از ۱۰۰ تایر، اختلاف چندانی با ۰/۰۴۸ ندارد و این در حالی است که ۶۰ تایر معیوب از بین ۱۰۰۰ تایر، اختلاف چشمگیری دارد. این مسأله نشان می‌دهد که اندازه نمونه بر آزمون‌های آماری تأثیر دارد. نمونه کوچک‌تر بیشتر متأثر از نوسان‌های تصادفی است تا نمونه بزرگ‌تر.

ب) تخمین آماری

استفاده از داده‌ها برای به دست آوردن بهترین تخمین و توصیف ممکن از پارامترهای جمعیت

پارامتر جمعیت: مقدار p در توزیع دوجمله‌ای، مقدار μ در توزیع پواسون، یا مقادیر μ و σ در توزیع نرمال.

تئوری تخمین ≡ آن بخشی از آمار ریاضی که با تخمین پارامتر توزیع احتمالات جمعیت سر و کار دارد

همچنین این تخمین معیاری کمی از خطای محتمل است.

چنین تخمین‌هایی از دو نوع هستند؛

تخمین نقطه‌ای[1]: استفاده از داده‌ها برای محاسبه یک مقدار منفرد بهینه

تخمین نقطه‌ای یک عدد است؛ از روی نمونه محاسبه می‌شود و تقریبی از توزیع جمعیت ناشناخته (که نمونه‌گیری از آن انجام شده است) می‌دهد.

چنین تخمین نقطه‌ای به تنهایی، در مورد خطای موجود در تخمین صحبتی نمی‌کند.

تخمین بازه‌ای[2]: استفاده از یک بازه به جای یک نقطه برای محاسبه مقدار بهینه

به این تخمین، **بازه اطمینان**[3] : نیز گفته می‌شود.

تخمین بازه‌ای محدوده‌ای از مقادیر را مشخص می‌کند که مقدار درست در کسری معین از زمان می‌تواند در آن بازه قرار گیرد.

---

1. Point Estimate
2. Interval Estimate
3. Confidence Interval

هر چه تخمین بازه‌ای گسترده‌تر باشد، تخمین نقطه‌ای ضعیف‌تر است.

تخمین نقطه‌ای: بهترین تخمین نقطه‌ای به معیاری بستگی دارد که ما با آن معیار در مورد تخمین قضاوت می‌کنیم.

مثال: فرض کنید ۱۱ آزمون در یک راکتور در شرایط معین و ثابت انجام شده است و مقادیر بازدهی به قرار زیر است؛ ۳۲، ۵۵، ۵۸، ۵۹، ۵۹، ۶۰، ۶۳، ۶۳، ۶۳، ۶۳، ۶۷.

نوسان داده‌ها به دلیل متغیرهای کنترل نشده و خطای اندازه‌گیری است. فرض کنید می‌خواهیم بهترین مقدار منفرد بازدهی را به دست آوریم. میانگین نمونه برابر است با:

$$\bar{X} = ۵۸/۴$$

همچنین میانه $m = 60$، و نما برابر با ۶۳ است. اما شاید بازدهی ۳۲٪ مربوط به آزمونی باشد که در آن خطاهایی وجود داشته است. هرچند نمی‌توان آزمونی را بدون آگاهی از علت مقدار پایین آن حذف نمود اما میانگین وزن بی‌موردی برای آن در نظر می‌گیرد.

ممکن است از میانه (۶۰) به عنوان بهترین تخمین بازدهی استفاده شود زیرا این پارامتر وزنی برای پایین‌ترین مقدار در نظر نمی‌گیرد. از سوی دیگر، می‌توانستیم در ۴ آزمون از میان این ۱۱ آزمون به بازدهی ۶۳٪ برسیم. شاید این مقدار (نما) بهترین تخمین از آزمون‌های آینده در شرایط دقیقا کنترل شده باشد.

به وضوح مشخص است که آمار نمی‌تواند قضاوت لازم در این مورد را انجام دهد. اگر بگوییم که میانگین نمونه (۵۸/۴) بهترین تخمین از جمعیت در شرایط معین است، باید داده‌ها از نمونه‌ای تصادفی از جمعیت گرفته شده باشند. **چنان چه بازدهی ۳۲٪ دارای احتمال رخداد یکسان با هر مقدار دیگر باشد، آن گاه میانگین بهترین تخمین است.**

چند ویژگی تخمین‌ها به ما کمک می‌کنند تا تعیین کنیم چه تخمینی بهترین تخمین منطبق با اهداف ما است. این ویژگی‌ها عبارت هستند از:

- همسانی، سازگاری[1]؛
- سوداری[2]؛
- کارایی[1].

1. Consistency
2 .Bias

❐ همسانی، سازگاری[2]

این ویژگی سبب می‌شود تا مقدار درست پارامتر جمعیت با افزایش اندازه نمونه به دست آید.

وقتی n به سمت بی‌نهایت میل پیدا می‌کند، میانگین نمونه $(\bar{X})$ به میانگین جمعیت (μ) متمایل می‌شود؛ یعنی $\bar{X}$ یک تخمین سازگار (همسان) از μ است.

سوداری[3]

یک تخمین وقتی سودار **نیست** که مقدار واقعی را پیش‌بینی نماید.

به لحاظ ریاضی، یک تخمین سودار نیست اگر **مقدار مورد انتظار** آن برابر با **پارامتر جمعیت** باشد.

مثلاً $\bar{X}$ تخمینی بدون سو از میانگین جمعیت (μ) است زیرا:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

از سوی دیگر، واریانس نمونه سوددار است زیرا داریم:

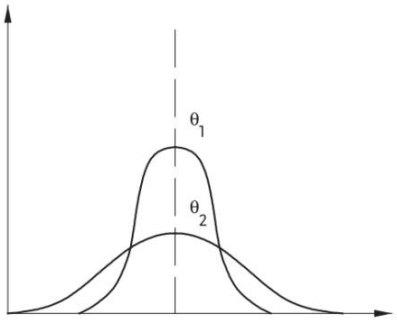
$$S_X^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

اما $E(S_X^2) = \frac{n-1}{n}\sigma_X^2$ بدین معنا که $E(S_X^2) \neq \sigma_X^2$

ثابت شده است که توجه تنها به همسانی (سازگاری) و سوداری یک تخمین کفایت نمی‌کند.

می‌توان مثال‌هایی از تخمین‌های مختلف را ارائه نمود که همسان (سازگار) با جمعیت پایه، و سودار به سمت میانگین جمعیت هستند.

معیار برای تخمین بهتر: تخمین بهتر آن تخمینی است که پراکندگی کمتری داشته باشد.



1. Efficiency
2. Consistency
3. Bias

فرض کنید دو تخمین همسان (سازگار) و سودار θ_1 و θ_2 در مورد یک پارامتر جمعیت داریم. همچنین در نظر بگیرید که θ_1 پراکندگی کمتری نسبت به θ_2 دارد (شکل بالا).

از روی شکل مشخص است که میانگین نمونه‌ها با هم برابر است: $E(\theta_1) = E(\theta_2)$

مقادیر متغیر تصادفی θ_1 حول پارامتر جمعیت، پراکندگی کمتری نسبت به θ_2 دارند. این بدان معنا است که خطای متوسط در تخمین θ_1 کوچک‌تر از تخمین θ_2 است. پس تخمین θ_1 **کاراتر** است.

❐ کارایی[1]

یک تخمین کارا تخمینی است که منجر به ارائه مقادیری نزدیک به مقدار درست می‌شود.

معیار پراکندگی مقادیر حول یک مقدار درست، واریانس است.

تخمین آماری که دارای کمترین واریانس است، یک تخمین کارا است.

مثلاً برای یک جمعیت با توزیع نرمال، میانگین، کمترین واریانس (σ_X^2/n) را دارد و این در حالی است که واریانس میانه برابر با $\pi\,\sigma_X^2/2n$ است. کارایی میانه که به منزله تخمینی از موقعیت جمعیت نرمال است، عبارت است از:

$$E = \frac{\sigma_X^2 / n}{\pi\sigma_X^2 / 2n} = \frac{2}{\pi} = 0/637$$

کارایی معمولاً ویژگی مهمتری از بی‌سویی است.

امکان دارد یک آماره بی‌سو باشد (به دلیل انحراف زیاد از هر دو سوی مقدار درست که منجر به خنثی شدن می‌شود) اما در عین حال بسیار ناکارا باشد.

❐ تخمین بازه‌ای

این که پارامتر تخمین انتخاب شده چه قدر مناسب است، امری چندان مهم نیست بلکه انحراف تخمین از مقدار درست آن، بسیار مهم است.

مثلاً اگر در حل عددی یک معادله، پاسخ به دست آمده ۳/۲۴ باشد و بیشترین مقدار انحراف ممکن از پاسخ درست آن ۰/۰۳± باشد، اطمینان داریم که پاسخ درست مجهول در بازه (۳/۲۱ الی ۳/۲۴) قرار می‌گیرد.

---

1. Efficiency

اگر **احتمال** (α - ۱) برابر با ۰/۹۵ در نظر گرفته شود، می‌توان انتظار داشت که حدود ۹۵٪ نمونه‌ها بازه اطمینانی دارند که دربرگیرنده پارامتر جمعیت است.

انتخاب بازه اطمینان به ریسک خطای مورد پذیرش بستگی دارد.

❐ آزمون‌ها و تخمین‌ها با واریانس نامشخص

معمولاً مقدار عددی واریانس جمعیت معلوم نیست و تنها می‌توان با گردآوری داده‌ها واریانس نمونه را محاسبه کرد و از آن به عنوان واریانس جمعیت استفاده نمود.

یک آماره جدید (t) موسوم به توزیع t (student) است:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_{\circ}}{S_X / \sqrt{n}}$$

برای یک جمعیت نرمال داریم:

$$t = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_{\circ}}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\left(\frac{۱}{n-۱}\right)\left[\frac{(n-۱)S_X^{۲}}{\sigma_X^{۲}}\right]}}$$

صورت این کسر متغیر نرمال استاندارد (Z) و $(n-۱)S_X^{۲}/\sigma_X^{۲}$ دارای توزیع "مربع- کای" ($chi-square$) است. کمیت $(n-۱)$ درجه آزادی است.

توزیع مربع – کای

$$f(x) = \frac{x^{\left(\frac{k}{۲}-۱\right)} \exp\left(\frac{-x}{۲}\right)}{\left(\frac{k}{۲}-۱\right)!\ ۲^{\frac{k}{۲}}}; x > ۰$$

میانگین = k واریانس = ۲k

Degrees of freedom (n-1)	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	3.08	6.31	12.7	31.8	63.7
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
5	1.48	2.01	2.57	3.36	4.03
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
20	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84
25	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Remark: For t values at lower values of ; $t_{\alpha} = -t_{1-\alpha}$
Hence, $t_{0.05} = -t_{0.95} = -2.35$ for (n - 1)=3

توجه به این نکته لازم است که به ازای اندازه نمونه کوچک، مقادیر t بسیار بزرگ‌تر از مقادیر نرمال استاندارد مربوط به خود هستند.

می‌توان توزیع نرمال استاندارد را برای نمونه‌هایی با اندازه بیشتر از ۳۰ ($n > ۳۰$) و به ازای نمونه‌هایی با اندازه کمتر از آن ($n < ۳۰$) از توزیع t استفاده نمود.

به عبارت دیگر، می‌توان فرض نمود که به ازای $n > ۳۰$، مقدار $S_X^۲$ با $\sigma_X^۲$ برابر است.

مثال: فرض کنید ۱۱ آزمون در یک راکتور در شرایط معین و ثابت انجام شده است و مقادیر بازدهی به قرار زیر است؛ ۳۲، ۵۵، ۵۸، ۵۹، ۵۹، ۶۰، ۶۳، ۶۳، ۶۳، ۶۳، ۶۷. می‌خواهیم فرضیه ۶۳ = μ را ارزیابی نماییم.

واریانس را محاسبه می‌کنیم: $S_X^۲ = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^۲}{n-۱} = ۸۷/۰۵ \rightarrow S_X = ۹/۳۳$

روند ۷ مرحله‌ای را اجرا می‌کنیم:

۱- توزیع جمعیت پایه را نرمال فرض می‌کنیم؛

۲- H_0: $\mu = ۶۳$ $\quad$ H_1: $\mu < ۶۳$ یا $\mu > ۶۳$

۳- آماره آزمون عبارت است از: $t = \frac{\bar{X} - \mu_{\circ}}{S_X / \sqrt{n}}$

۴- مقدار α را برابر با ۰/۰۵ در نظر می‌گیریم.

۵- درجه آزادی $(n-1)$ برابر با ۱۰ است. از جدول داریم: $t_{۰/۹۷۵} = ۲/۲۳$ و نیز $t_۱ - ۰/۵/۲ = t_{۰/۰۲۵} = -۲/۲۳$ و $t_{۰/۰۵/۲}$

۶- از آنجایی که $\bar{X}$ = ۵۸/۴ است پس: $t = \frac{\bar{X} - \mu_۰}{S_X / \sqrt{n}}$ = -۱/۶۴

۷- از آن جایی که ۲/۲۳ > ۱/۶۴- > ۲/۲۳- است، پس H_0 پذیرفته می‌شود.

آزمون‌ها و تخمین‌ها روی واریانس آماری

پس از ارزیابی داده‌ها (به کمک آزمون‌ها یا تخمین‌ها) ← لزوم چک کردن تغییرپذیری[1] آنها

تغییرپذیری ≡ میزان پراکندگی داده‌ها حول میانگین

یک معیار از پراکندگی (تغییرپذیری) داده‌ها ≡ واریانس (واریانس بزرگ یعنی پراکندگی بیشتر داده‌ها)

در یک حالت منحصر به فرد اگر نوسان تصادفی در داده‌ها رخ ندهد، اندازه‌گیری‌های یکسان و دقیقی از میانگین به دست می‌آید. در این حالت، پراکندگی وجود ندارد و واریانس صفر است.

در عمل، نوسان‌های تصادفی در متغیرهای فرایند و خطاهای تصادفی در اندازه‌گیری همیشه وجود دارند.

❐ منابع خطا

دو منبع خطا در یک اندازه‌گیری:

۱- محدودیت حساسیت[2] ابزاری؛

۲- نقص و عیب[3] در طراحی آزمایش یا تکنیک‌های سنجش.

خطاها اغلب به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- تصادفی[4]

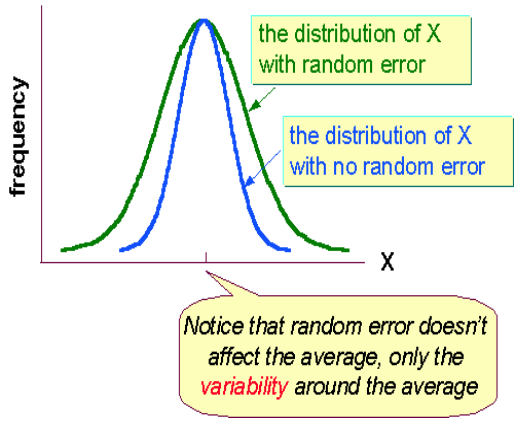
۲- سیستماتیک[5]

خطای تصادفی همیشه وجود دارد.

اندازه‌گیری‌های اغلب به شکل زیر نشان داده می‌شوند: **اندازه‌گیری ± خطای تصادفی**

---

1. Variability
2. Sensitivity
3. Imperfection
4. Random
5. Systematic



توجه کنید که خطای تصادفی روی میانگین تأثیری نمی‌گذارد بلکه تنها تغییرپـذیری[1] حـول مقـدار میانگین را تغییر می‌دهد.

■ **منابع خطای تصادفی**

⊙ خطای اپراتور

⊙ تغییر شرایط آزمایش

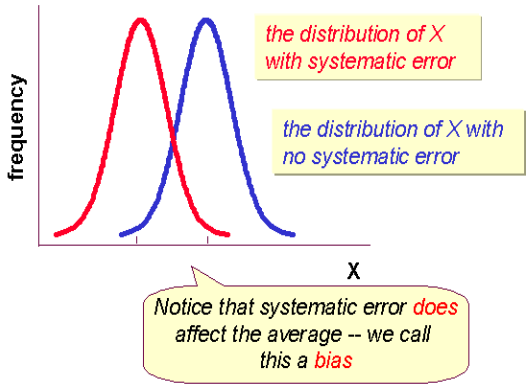
چگونه خطای تصادفی را به کمترین مقدار برسانیم؟

❍ تکرار اندازه‌گیری و محاسبه مقدار میانگین

❍ خطای سیستماتیک نوعا وجود دارد.

اندازه‌گیری‌های اغلب به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

اندازه‌گیری - خطای سیستماتیک یا اندازه‌گیری + خطای سیستماتیک



1. Variability

توجه کنید که خطای سیستماتیک روی میانگین تأثیری می‌گذارد که بدان سوداری[1] گفته می‌شود.

■ **منابع خطای سیستماتیک**

محدودیت‌های ابزاری، فیزیکی و انسانی: مثلاً ابزار کالیبره نیست.

❐ تغییر شرایط آزمایش

چگونه خطای سیستماتیک را به کمترین مقدار برسانیم؟

✧ کالیبره کردن دقیق

✧ استفاده از بهترین تکنیک ممکن

پس نیاز داریم تا آزمون‌ها و تخمین‌هایی در مورد تغییرپذیری داده‌های آزمایشگاهی داشته باشیم.

در این راستا می‌توان:

الف) از روندی مشابه آزمون‌ها و تخمین‌های انجام شده در مورد میانگین بهره برد یا؛

ب) می‌توان تخمین‌های نقطه‌ای یا تخمین‌های بازه‌ای از واریانس ارائه نمود.

لازم است تا دو توزیع احتمال جدید معرفی شود:

روشی آماری برای تخمین بازه‌ای یک واریانس بر مبنای دو توزیع مربع- کای و توزیع F قرار دارد.

اگر دقیق‌تر بگوییم، تخمین بازه‌ای یک واریانس (σ^2)، بر اساس توزیع χ^2 است و این در حالی است که تخمین و ارزیابی دو واریانس بخشی از توزیع F است.

⊡ توزیع مربع کای (χ^2)

χ^2 برابر با مجموع مربع $(k + 1)$ متغیر نرمال استاندارد مستقل تعریف می‌شود.

تابع چگالی احتمال χ^2 عبارت است از:

$$f\left(x^2\right) = \frac{\left(x^2\right)^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!\, 2^{\frac{k}{2}}}$$

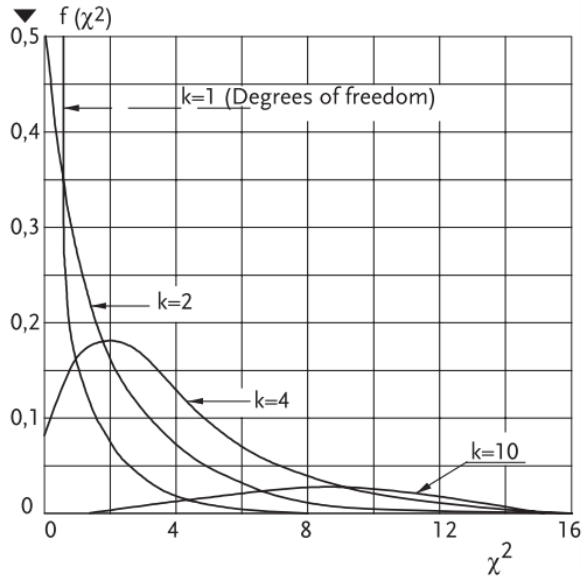
چون χ^2 مربع متغیرهای نرمال استاندارد است، همواره مثبت است.

1. Bias

این توزیع به تعداد متغیرهای مستقل درون حاصل‌جمع وابسته است و درجه آزادی k است.

برخی از مقادیر توزیع χ^2

Degrees of freedom k	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	3.84	5.02	6.63	9.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	18.3	20.5	23.2	25.2
15	4.60	5.23	6.26	7.26	25.0	27.5	30.6	32.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	31.4	34.2	37.6	40.0
25	10.5	11.5	13.1	14.6	37.7	40.6	44.3	46.9
30	13.8	15.0	16.8	18.5	43.8	47.0	50.9	53.7



چند توزیع مربع کای؛ این توزیع نامتقارن است

بر اساس مقدار که در بازه (۰، ∞) است و شکل بالا می‌توان دید که این توزیع نامتقارن است.

برای $k \geq ۳۰$، می‌توان توزیع χ^2 را با توزیع نرمال استاندارد تقریب زد:

$$x^{۲}_{\alpha,k} = \frac{۱}{۲}\left[Z_{\alpha} + \sqrt{۲k-۱} \right]^{۲}$$

که در آن Z_{α}، متغیر نرمال استاندارد هم‌ارز است.

میانگین توزیع $\chi^{۲}$، برابر با k و واریانس آن ۲k است.

برای مقادیر بزرگ k می‌توان نوشت:

$$Z = \left(\chi^{۲} - k\right) / \sqrt{۲k}$$

از توزیع $\chi^{۲}$ برای آزمون روی واریانس استفاده می‌شود زیرا آماره زیر دارای توزیع $\chi^{۲}$ با k درجه آزادی است:

$$\chi^{۲}_{k} = k\frac{S^{۲}_{X}}{\sigma^{۲}_{X}}$$

⊡ توزیع F

از توزیع F برای مقایسه واریانس‌های دو جمعیت استفاده می‌شود.

واریانس‌های $S_{۱}^{۲}$ و $S_{۲}^{۲}$ برای دو جمعیت با اندازه‌های $n_{۱}$ و $n_{۲}$ در نظر بگیرید؛ آنگاه F چنین تعریف می‌شود:

$$F = \frac{S^{۲}_{۱}}{S^{۲}_{۲}}$$

که در آن F دارای توزیع F با $n_{۱}-۱$ و $n_{۲}-۱$ درجه آزادی است. اگر $k_{۱} = n_{۱}-۱$ و $k_{۲} = n_{۲}-۱$ را در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$F = \frac{\frac{\sigma^{۲}_{۱}\chi^{۲}_{k_{۱}}}{k_{۱}}}{\frac{\sigma^{۲}_{۲}\chi^{۲}_{k_{۲}}}{k_{۲}}}$$

F نسبت دو توزیع مربع کای است که هر یک بر درجه آزادی خود تقسیم شده‌اند.

توزیع F معمولاً به شکل $F(k_{۱}, k_{۲})$ نوشته می‌شود که مشخص‌کننده درجه آزادی است. همچنین داریم:

$$F_{\alpha}\left(k_{۱}, k_{۲}\right) = \frac{۱}{F_{۱-\alpha}\left(k_{۲}, k_{۱}\right)}$$

برخی مقادیر توزیع F مربوط به $F_{.95}$

k_2	Degrees of freedom in larger variance, k_1												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	248	250	254
2	18.51	19.0	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.44	19.46	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.66	8.62	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.80	5.74	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.56	4.50	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.87	3.81	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.44	3.38	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.15	3.08	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	2.93	2.86	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.77	2.70	2.54
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.12	2.04	1.84
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	2.16	1.93	1.84	1.62
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.57	1.46	1.00

توزیع F استفاده گسترده‌ای در روش‌های آماری دارد؛ مثلاً در آنالیز واریانس (ANOVA) داده‌های مربوط به نرخ خوردگی فلز A توسط اسید نیتریک و نیز نرخ خوردگی فلز B توسط همین اسید به قرار زیر است. آیا واریانس‌های این مقادیر برابر با هم است؟

A: ۴۰، ۴۲، ۴۲، ۴۳، ۴۶، ۴۷، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰

B: ۳۹، ۴۱، ۴۱، ۴۴، ۴۵، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۸

به کمک این داده‌ها داریم:

$$A: \bar{X}_1 = ۴۵/۴; S_1^۲ = ۱۱/۶۰; n_1 = ۱۰$$
$$B: \bar{X}_2 = ۴۴/۴; S_2^۲ = ۹/۸۲; n_2 = ۱۰$$

مراحل هفت‌گانه به قرار زیر است:

۱- فرض بر آن است که هر دو جمعیت توزیع نرمال دارند. متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 هستند؛

۲- $H_0: \sigma_2^۲ = \sigma_1^۲$ $\quad$ $H_1: \sigma_2^۲ \neq \sigma_1^۲$

۳- آماره آزمون $F = S_1^۲ / S_2^۲$ است.

۴- در نظر می‌گیریم که: $a = ۰/۱۰$

۵- F به شکل F(۹، ۹) توزیع می‌شود و منطقه بحرانی عبارت است از:

$$F < F_{۰/۰۵}(۹,۹) \quad , \quad F > F_{۰/۰۵}(۹,۹)$$

از روی جدول داریم: $F_{۰/۹۵}(۹,۹) = ۳/۱۸$ $\quad$ پس $F_{۰/۰۵}(۹,۹) = \frac{۱/۳}{۱۸} = ۰/۳۱۴$

۶- در این آزمون: F = ۱۱/۶۰/۹/۸۲ = ۱/۱۸

۷- از آن جایی که ۳/۱۸ > ۱/۱۸ > ۰/۳۱۴ است پس فرضیه H_0 تأیید می‌شود. یعنی تفاوت معناداری بین واریانس‌ها نیست.

بازه تخمین برای نسبت واریانس‌ها عبارت است از:

$$P\left[\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(k_1,k_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(k_1,k_2)}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[0/371 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3/8\right] = 0/90$$

■ آنالیز واریانس[1]

این آنالیز بر اساس نسبت‌های واریانس قرار دارد و تعیین می‌کند که آیا تفاوت معناداری بین میانگین گروه‌های مختلف داده‌های تجربی (با توزیع نرمال) وجود دارد یا خیر؟

توجه کنید به واسطه پیچیدگی محاسبات ANOVA معمولاً از برنامه‌های کامپیوتری استفاده می‌شود.

■ نمادگذاری و حساب

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

ماتریس داده‌ها

Column		1	2	.	.	.	j	.	.	.	J
	1	X_{11}	X_{12}	.	.	.	X_{1j}	.	.	.	X_{1J}
	2	X_{21}	X_{22}	.	.	.	X_{2j}	.	.	.	X_{2J}
R	.	.	.				.				.
	.	.	.				.				.
O	.	.	.				.				.
	i	X_{i1}	X_{i2}	.	.	.	X_{ij}	.	.	.	X_{iJ}
W	.	.	.				.				.
	.	.	.				.				.
	.	.	.				.				.
	I	X_{I1}	X_{I2}	.	.	.	X_{Ij}	.	.	.	X_{IJ}
Sums	I	$X_{\bullet 1}$	$X_{\bullet 2}$	.	.	.	$X_{\bullet j}$	.	.	.	$X_{\bullet J}$
Means		$\bar{X}_{\bullet 1}$	$\bar{X}_{\bullet 2}$	.	.	.	$\bar{X}_{\bullet j}$	.	.	.	$\bar{X}_{\bullet J}$

1. Anova

هر ستون را می‌توان به عنوان نمونه تصادفی با اندازه I که از جمعیت نرمال انتخاب شـده، در نظـر گرفت.

مثلاً ستون‌ها مربوط به چهار کاتالیست و ردیف‌ها را آزمون‌های انجام شده در شرایط مشابه یک موقعیت کلی در ماتریس داده‌ها را به شکل X_{ij} به داده‌هـا اختصـاص مـی‌دهـیم (i سـتون و j ردیف داده)؛ مجموع مقادیر در ستون i عبارت است از:

$$X_{ij} = \sum_{j=1}^{j} Xij$$

میانگین مقادیر در ستون i عبارت است از:

$$\bar{X}_{ij} = \frac{X_{ij}}{j}$$

به صورت مشابه، مجموع مقادیر ردیف j عبارت است از: $X_{ij} = \sum_{i=1}^{i} X_{ij}$

و میانگین مقادیر در ردیف j برابر است با:

$$\bar{X}_{ij} = \frac{X_{ij}}{i}$$

مجموع همه مقادیر در ماتریس که با مشخص می‌شود عبارت است از:

$$X_{ij} = \sum_{i=1}^{i}\sum_{j=1}^{j} X_{ij}$$

میانگین تمامی مقادیر موسوم به میانگین پایه (grand mean) است و با $\bar{X}_{ij}$ نشان داده می‌شود:

$$\bar{X}_{ij} = \frac{X_{ij}}{ij}$$

آنالیز واریانس یک‌طرفه[1]

در این آنالیز واریانس، گروه‌هایی در اختیار داریم که می‌خواهیم یکسـانی میـانگین آنهـا را بررسـی نماییم.

فرض: هر J گروه از داده‌های تجربی، نمونه‌ای تصادفی از جمعیت نرمال با واریانس (σ^2) هستند.

دو تخمین ممکن در مورد واریانس جمعیت وجود دارد:

1. One-Way Analysis Of Variance

تخمین آمیخته[1] ← استفاده از آزمون t در مورد دو میانگین.

محاسبه میانگین گروه‌ها حول میانگین پایه:

۱- تخمین آمیخته واریانس

واریانس نمونه‌های مربوط به هر گروه محاسبه می‌شود (هر ستون داده‌ها آنالیز می‌شود).

به هر یک از تخمین‌ها متناسب با درجه آزادی آن‌ها، وزنی داده می‌شود تا یک واریانس آمیخته از نمونه‌ها به دست آید.

واریانس نمونه هر ستون i، عبارت است از:

$$S_j^2 = \frac{\sum_i \left(X_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2}{I-1}$$

قبلا دیدیم که برای هر j داریم:

$$E\left(S_j^2\right) = \sigma^2$$

J تخمین به شکل معادله $S_j^2 = \frac{\sum_i \left(X_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2}{I-1}$ داریم.

برای آمیختن این تخمین‌ها، به هر یک وزنی متناسب با درجه آزادی یعنی $(I-1)$ می‌دهیم و تقسیم بر درجه آزادی کل یعنی $J(I-1)$ می‌کنیم.

واریانس آمیخته نمونه عبارت است از:

$$S_p^2 = \frac{\sum_j \left((I-1)S_j^2\right)}{J\left(I-1\right)}$$

از تلفیق $S_j^2 = \frac{\sum_i \left(X_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2}{I-1}$ با $S_p^2 = \frac{\sum_j \left((I-1)S_j^2\right)}{J\left(I-1\right)}$ داریم:

$$S_p^2 = \frac{\sum_j \left[\sum_i \left(X_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2\right]}{J(I-1)} = \frac{SS_W}{J(I-1)} = MS_W$$

SS_W موسوم به مجموع مربعات درون گروه‌ها یا خطای مجموع مربعات[2] است.

حاصل تقسیم SS_W بر درجه آزادی کل (MS_W) خطای متوسط مربعات[3] است.

---

1. Pooled Estimate
2. Error Sum Of Squares
3. Error Mean Squares

فرم دیگر معادله فوق که در محاسبات کاربردی‌تر است:

$$S_p^2 = \frac{\sum_i \sum_j \left(X_{ij}\right)^2 - \left(\sum_j X_{ij}^2\right)/I}{J\left(I-1\right)} = \frac{SS_W}{J\left(I-1\right)} = MS_W$$

تخمین زننده آمیخته واریانس جمعیت (S_p^2)، یک تخمین زننده ناسودار برای σ^2 است فارغ از این که میانگین جمعیت‌ها (μ_1، μ_2، ...، μ_j) با هم برابر هستند یا نه.

این ناسودار بودن به این معنا است که:

$$E\left(S_p^2\right) = \frac{\sum_j E\left(\sum_i \left(X_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2 / \left(I-1\right)\right)}{j} = \frac{\sum_j E\left(S_j^2\right)}{j} = \sigma^2$$

۲- واریانس میانگین گروه‌ها حول میانگین پایه

روش دوم تخمین واریانس جمعیت (σ^2)، محاسبه واریانس نمونه‌ای از میانگین گروه‌ها حول میانگین پایه با استفاده از رابطه زیر است:

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum_j \left(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2}{J-1}$$

اگر میانگین جمعیت گروه‌ها با هم برابر باشند، آن گاه $S_{\bar{X}}^2$ تخمینی ناسودار از واریانس میانگین جمعیت $\sigma_{\bar{X}}^2$ است.

برای به دست آوردن تخمین زننده‌ای از واریانس جمعیت (σ^2) یادآوری می‌کنیم که: $S_{\bar{X}}^2 = \frac{S_X^2}{I}$

از تلفیق معادله $S_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum_j \left(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2}{J-1}$ با $S_{\bar{X}}^2 = \frac{S_X^2}{I}$ داریم:

$$S^2 = \frac{I\sum_j \left(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2}{J-1} = \frac{SS_B}{J-1} = MS_B$$

دو کمیت SS_B و MS_B موسوم به مجموع مربعات بین گروه‌ها و میانگین مربعات بین گروه‌ها هستند.

برای سادگی محاسبات از رابطه رو به رو استفاده می‌شود:

$$S^2 = \frac{\dfrac{\sum_j X_{ij}^2}{I - X_{ij}^2 / IJ}}{J-1} = \frac{SS_B}{J-1} = MS_B$$

تخمین زننده S^2 در معادله بالا، یک تخمین زننده ناسودار از σ^2 است اگر میانگین‌های جمعیت گروه با هم برابر باشند.

اگر میانگین جمعیت‌ها (μ_1، μ_2، ...، μ_J) با هم برابر نباشند، S^2 تخمینی دست بالا از σ^2 است $(E(S^2) > \sigma^2)$.

دو تخمین زننده S^2 و S_p^2 توسط رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\boxed{\sum_j \sum_i \left(X_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2} = I \sum_j \left(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{ij}^2\right)^2 + \sum_j \sum_i \left(X_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2$$

سمت چپ رابطه، موسوم به کل مجموع مربعات اصلاح شده به ازای میانگین است و با SS_{TC} نشان داده می‌شود.

و از طرفی داریم؛ $I\sum_j \left(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2 = SS_B$ و نیز $\sum_j \sum_i \left(X_{ij} - \bar{X}_{ij}\right)^2 = SS_W$ پس می‌توان نوشت:

$$SS_{TC} = SS_B + SS_W$$

به عبارت دیگر، تغییرپذیری کل در دو مؤلفه توزیع است؛ یکی SS_B که تغییرپذیری درون گروهی را مشخص می‌کند و دیگر SS_W که بیان کننده خطای آزمایشگاهی (تجربی) یا تغییرات نمونه‌برداری است.

درجه آزادی SS_{TC} نیز به درجه آزادی مرتبط با SS_B و SS_W مربوط است یعنی:

$$IJ - 1 = (J - 1) + J(I - 1)$$

اگر میانگین‌ها μ_1، μ_2، ...، μ_J همگی برابر با هم باشند، آن‌گاه S^2 و S_p^2 مستقل از هم هستند و متغیر تصادفی

$$F = \frac{S^2}{S_p^2} = \frac{SS_B / J - 1}{SS_W / J(I - 1)} = \frac{MS_B}{MS_W}$$

دارای توزیع F به ازای $(J - 1)$ و $J(I - 1)$ درجه آزادی است. رابطه $F = \frac{S^2}{S_p^2} = \frac{MS_B}{MS_W}$ بیان‌گر سوداری آنالیز واریانس است.

پس اگر $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_J$ باشد، مقدار F باید نزدیک به ۱ باشد و اگر H_0 فرضیه‌ای درست نباشد، S^2 بسیار بزرگ‌تر از S_p^2 است و F بزرگ‌تر از ۱ می‌شود. منطقه رد H_0 به شکل روبرو است: $F > F_{k_1, k_2, 1-\alpha}$

که در آن $K_۱ = J - ۱$, $k_۲ = J(I-۱)$ است.

فیشر جدول زیر را برای ارائه واضح نتایج آنالیز واریانس ارائه نمود.

آنالیز واریانس یک‌طرفه

Source of variation	f	Sum of squares	Mean square	Test statistic
Between columns	J-1	$SS_B = \frac{\sum_j X_{\bullet j}^2}{I} - \frac{X_{\bullet\bullet}^2}{IJ}$	$MS_B = \frac{SS_B}{J-1}$	$\frac{MS_B}{MS_W}$
Within columns – error	J(I-1)	$SS_W = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{X_{\bullet j}^2}{I}$	$MS_W = \frac{SS_W}{J(I-1)}$	–
Total	JI-1	$SS_T = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{X_{\bullet\bullet}^2}{IJ}$	–	–

از سه عامل شیمیایی برای رشد بیشتر گیاهی در شرایط ثابت و مشابه استفاده شده است. با توجه به اطلاعات زیر مربوط به میزان رشد گیاه پس از یک ماه، تعیین کنید که آیا می‌توان گفت که کدام عامل شیمیایی کارایی بالاتری دارد؟

	No1	No2	No3
	23	16	18
	21	23	22
Height	24	20	25
	17	21	21
	19	18	20
	$X_{\bullet 1}$=104	$X_{\bullet 2}$=98	$X_{\bullet 3}$=106
	$\bar{X}_{\bullet 1}$=20.8	$\bar{X}_{\bullet 2}$=19.6	$\bar{X}_{\bullet 3}$=21.2

در ابتدا حاصل‌جمع‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\sum_i \sum_j \left(X_{ij}\right)^۲ = ۲۳^۲ + ۲۱^۲ + ۲۴^۲ + \cdots + ۲۰^۲ = ۶۴۲۰$$

$$\sum_j X_{ij}^۲ = ۱۰۴^۲ + ۹۸^۲ + ۱۰۶^۲ = ۳۱۶۵۶$$

$$X_{ij}^۲ = \left(۱۰۴ + ۹۸ + ۱۰۶\right)^۲ = ۹۴۸۶۴$$

سپس مقادیر $S_p^۲$ و $S^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$S_p^۲ = \frac{۶۴۲۰ - \frac{۳۱۶۵۶}{۵}}{۳\left(۵-۱\right)} = ۷/۴۰ \quad ; \quad k_۱ = ۱۲$$

$$S^2 = \frac{\frac{۳۱۶۵۶}{۵} - \frac{۹۴۸۶۴}{۳\times۵}}{۳-۱} = ۳/۵۰ \;;\; k_۲ = ۲$$

از این جا به بعد از روش آزمون ۷ مرحله‌ای استفاده می‌کنیم:

۱- فرض می‌کنیم با جمعیت‌های توزیع شده به صورت نرمال مواجه هستیم. همه گروه‌ها دارای واریانس جمعیت ثابت $\sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ = \sigma_۳^۲$ هستند.

۲- H_0: $\mu_۱ = \mu_۲ = \mu_۳$ $\quad$ H_1: H_0 درست نیست.

۳- آماره آزمون: $F = \frac{S^2}{S_p^2}$

۴- در نظر بگیرید که $a = ۰/۰۵$

۵- فرضیه H_0 رد می‌شود اگر F بیشتر از $F_{۰/۹۵(۲/۱۲)} = ۳/۸۸$ باشد.

۶- $F = \frac{۳/۵۰}{۷/۴۰} = ۰/۴۷$

۷- H_0 پذیرفته می‌شود زیرا ۳/۸۸ > ۰/۴۷ است.

پس دلیلی مبنی بر این که یک عامل شیمیایی معین سبب رشد بیشتری در گیاه شده است، وجود ندارد.

اما در یک آنالیز واریانس استاندارد، از جدولی موسوم به ANOVA استفاده می‌شود که در مسایل پیچیده‌تر بیشتر به درد می‌خورد.

$$SS_T = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{X_{ij}^2}{IJ} = ۶۴۲۰ - \frac{۹۴۸۶۴}{۳\times۵} = ۹۵/۸$$

$$SS_B = \frac{\sum_j X_{ij}^2}{I} - \frac{X_{ij}^2}{IJ} = \frac{۳۱۶۵۶}{۵} - \frac{۹۴۸۶۴}{۳\times۵} = ۷/۰$$

$$SS_W = SS_T - SS_B = ۸۸/۸$$

جدول ANOVA

Source of variation	f	SS	MS	F	$F_{2;12;0.95}$
Between groups	2	7.0	3.50	0.47	3.88
Within groups	12	88.8	7.40	–	–
Total	14	95.8	–	–	–

در یک بررسی زیست‌محیطی، مقدار فلورید در آب به چهار روش اندازه‌گیری شده است (A، B، C و D). در هر روش پنج تکرار وجود دارد. برای جلوگیری از سودار شدن تغییرات در نمونه‌ها، همه نمونه‌ها از یک حجم معین از آب برداشته شده است. نتایج بر حسب ppm عبارتند از:

A	۲	۳	۶	۵	۴
B	۵	۴	۴	۲	۳
C	۱	۳	۲	۴	۴
D	۲	۱	۱	۲	۱

الف) آیا روش‌های اندازه‌گیری همسان و هم‌ارز هستند؟ (سطح معناداری را ۵٪ در نظر بگیرید).

ب) محدوده اطمینان ۹۵٪ برای مقادیر حاصل از هر روش اندازه‌گیری چقدر است؟

حل:

الف) مجموع‌ها و مربعات لازم را محاسبه می‌کنیم:

$$X_{iA}=۲۰;\ \sum_i X_{iA}^۲=۹۰;\ \bar{X}_{iA}=۴.۰;\ \sum_j X_{ij}^۲=\left(۲۰^۲+۱۸^۲+۱۴^۲+۷^۲\right)=۹۶۹$$

$$X_{iB}=۱۸;\ \sum_i X_{iB}^۲=۷۰;\ \bar{X}_{iB}=۳/۶;\ \sum_i\sum_j X_{ij}^۲=۲۱۷$$

$$X_{iC}=۱۴;\ \sum_i X_{iC}^۲=۴۶;\ \bar{X}_{iC}=۲.۸;\ X_{iC}=۵۹$$

$$X_{iD}=۷;\ \sum_i X_{iD}^۲=۱۱;\ \bar{X}_{iD}=۱.۴$$

سپس مقادیر $S_p^۲$ و $S^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$S_p^۲=\frac{۲۱۷-\frac{۹۶۹}{۵}}{۴(۵-۱)}=۱/۴۵\quad ;\quad k_۱=۱۶$$

$$S^2 = \frac{\frac{۹۶۹}{۵} - \frac{۵۹^2}{۴\times۵}}{۴-۱} = ۶/۵۸ \;\; ; \;\; k_2 = ۳$$

و از روی آن مقدار F را حساب می‌کنیم:

$$F = \frac{S^2}{S_p^2} = ۴/۵۴ > F_{(۳,۱۶);۰/۹۵} = ۳/۲۴$$

پس فرضیه H_0 رد می‌شود؛ یعنی اختلاف معناداری بین روش‌های اندازه‌گیری وجود دارد.

جدول ANOVA

Source of variation	f	SS	MS	F	$F_{3;16.0,95}$
Between groups	3	19.75	6.58	4.54	3.24
Error	16	23.20	1.45	–	–
Total	19	42.95	–	–	–

ب) به ازای درجه آزادی (۱ – ۵)×۴ و در سطح اطمینان ۰/۹۵، ۲/۱۲۰ = $t_{۱۶\,;۰/۹۷۵}$ و ۲/۱۲۰- = $t_{۱۶\,;۰/۰۲۵}$ است. پس خطای استاندارد عبارت است از:

$$S_{\bar{p}} = \frac{S_p}{\sqrt{I}} = ۰/۵۳۹$$

محدوده اطمینان برای میانگین‌های چهار روش عبارت است از:

$$\mu_A = ۴/۰ \pm ۲/۱۲ \times ۰/۵۳۹$$
$$\mu_B = ۳/۶ \pm ۲/۱۲ \times ۰/۵۳۹$$
$$\mu_C = ۲/۸ \pm ۲/۱۲ \times ۰/۵۳۹$$
$$\mu_D = ۱/۴ \pm ۲/۱۲ \times ۰/۵۳۹$$

رسانایی چهار پوشش مختلف مورد ارزیابی قرار گرفته است. برای هر پوشش ۵ آزمون سنجش رسانایی (به صورت تصادفی) انجام شده است. نتایج به قرار زیر است:

I	II	III	IV
۵۶	۶۴	۴۵	۴۲
۵۵	۶۱	۴۶	۳۹
۶۲	۵۰	۴۵	۴۵
۵۹	۵۵	۳۹	۴۳
۶۰	۵۶	۴۳	۴۱

اگر عدد ۵۰ را از هر یک از این مقادیر کم کنیم، مقدارهای کد شده‌ای به دست می‌آید که عملیات محاسباتی را ساده می‌کند و همچنین تأثیری بر آماره F نخواهد داشت. پس داریم:

I	II	III	IV
۶	۱۴	−۵	−۸
۵	۱۱	−۴	−۱۱
۱۲	۰	−۵	−۵
۹	۵	−۱۱	−۷
۱۰	۶	−۷	−۹

در این شرایط داریم:

$$X_{ij} = \begin{matrix} I & II & III & IV \\ ۴۲ & ۳۶ & -۳۲ & -۴۰ \end{matrix} \qquad X_{ij} = ۶$$

$$\begin{matrix} I \\ \sum X_{ij}^{۲} = \end{matrix} \begin{matrix} ۵ & ۵ & ۵ & ۵ \\ ۳۸۶ & ۳۷۸۳۶ & ۲۳۶ & ۳۴۰ \end{matrix} \qquad I \times J = ۲۰ \qquad \sum\sum X_{ij}^{۲} = ۱۳۴۰$$

$$SS_T = \sum\sum X_{ij}^{۲} - \frac{X_{ij}^{۲}}{IJ} = ۱۳۴۰ - \frac{۶^{۲}}{۲۰} = ۱۳۳۸/۲$$

$$SS_B = \frac{\sum X_{ij}^{۲}}{I} - \frac{X_{ij}^{۲}}{IJ} = \frac{۵۶۸۴}{۵} - \frac{۶^{۲}}{۲۰} = ۱۱۳۵/۰$$

$$SS_W = SS_T - SS_B = ۱۳۳۸/۲ - ۱۱۳۵/۰ = ۲۰۳/۲$$

جدول ANOVA

Source of variation	f	SS	MS	F	$F_{3;16;0.95}$
Between groups	3	1135.0	378.3	29.8	3.24
Error	16	203.2	12.7	–	–
Total	19	1338.2	–	–	–

از آنجایی که معیار F محاسبه شده بسیار بزرگ‌تر (۲۹/۸ > ۳/۲۴) از مقدار F جدول است، فرضیه صفر با بازه اطمینان ۹۵٪ رد می‌شود؛ یعنی تفاوت آماری معناداری بین رسانایی این چهار پوشش وجود دارد.

❐ تحلیل رگرسیون[1]

یک تکنیک آماری برای ارائه رابطه‌ای کمی بین متغیر وابسته (پاسخ) و متغیرهای مستقل (عوامل، پارامترها) تحلیل رگرسیون است.

استفاده از داده‌های تجربی متغیرهای مربوطه برای ایجاد یک رابطه عددی که نشان دهنده تأثیر متغیرهای مستقل بر یک متغیر وابسته است.

غالباً این رابطه فرضی یک تابع خطی است. اگر این تابع خطی جواب نداد (با داده‌ها تطابق نداشت)، می‌توان از تابع چندجمله‌ای یا نمایی استفاده کرد.

رگرسیون خطی ساده

در ساده‌ترین حالت، رابطه پیشنهادی بین دو متغیر عبارت است از: $Y=\beta_0+\beta_1 X+\varepsilon$

Y متغیر وابسته، X متغیر مستقل و ε خطای تصادفی (یا خطای باقیمانده، residual error)

خطای باقیمانده عبارت است از مقدار تغییر در Y که توسط رابطه در نظر گرفته نشده است.

β_0 و β_1 موسوم به ضرایب رگرسیون هستند که باید آنها را تخمین زد.

فرض بر آن است که ε پارامتری مستقل است و توزیعی نرمال با میانگین ۰ و واریانس σ^2 است.

با در نظر گرفتن مقدار مورد انتظار خواهیم داشت: $E(Y)=\beta_0+\beta_1 X$

توجه: مقدار مورد انتظار خطا برابر با صفر است.

به ازای مقدار ثابت X، مقدار مورد انتظار به این قرار مشخص می‌شود:

$$E(Y)=E(Y/X)=\mu_{Y/X}$$

پس می‌توان نوشت:

$$E(Y)=E(Y/X)=\mu_{Y/X}=\beta_0+\beta_1 X$$

به معادله فوق رگرسیون Y نسبت به X گفته می‌شود.

متغیرهای تصادفی معادله $Y=\beta_0+\beta_1 X+\varepsilon$ ، Y و ε هستند و متغیر تصادفی Y توزیع نرمالی با میانگین $\mu_{Y/X}=\beta_0+\beta_1 X$ و واریانس σ^2 دارد.

1. Regression Analysis

به منظور تخمین رابطه بین Y و X، به تعداد n مشاهده از Y و X انجام می‌دهیم که با (X_i, Y_i) نشان داده می‌شود. با توجه به معادلات پیش می‌توان نوشت:

$$Y = E(Y/X) + \varepsilon$$

اگر b_0 و b_1 تخمین‌هایی از β_0 و β_1 باشند، تخمینی از E(Y) با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\hat{Y} = \hat{E}(Y) = b_0 + b_1 X$$

هر Y_i مشاهده شده را می‌توان چنین نوشت: $Y_i = \hat{Y}_i + e_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$

که در آن $\hat{Y}_i$ تخمینی از Y_i و e_i تخمینی از ε_i است.

رگرسیون خطی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i = b_0 + b_1 X_i + e_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

خطای باقیمانده واقعی برابر با $Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i) = \varepsilon_i$ است.

خطای باقیمانده مشاهده شده برابر با $Y_i - (b_0 + b_1 X_i) = Y_i - \hat{Y}_i$ است.

بهترین روش برای تخمین b_1 و b_0، روش کمترین مربعات (least squares) است که در آن مجموع مربعات ناشی از خطا (SS_E) را به کمترین مقدار می‌رسد.

خطای مجموع مربعات عبارت است از:

$$SS_E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2$$

برای کمینه‌سازی، مشتق جزیی خطای مجموع مربعات را نسبت به هر ثابت برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial (SS_E)}{\partial b_0} = \frac{\partial}{\partial b_0}\left[\sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2\right] = 0$$

$$\frac{\partial (SS_E)}{\partial b_1} = \frac{\partial}{\partial b_1}\left[\sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2\right] = 0$$

این دو معادله موسوم به معادلات نرمال هستند؛ با دیفرانسیل‌گیری داریم:

$$nb_0 + b_1\sum_i X_i = \sum_i Y_i$$
$$b_0\sum_i X_i + b_1\sum_i X_i^2 = \sum_i X_i Y_i$$

که همه مجموع‌ها از $i = 1$ الی $i = n$ است.

حل این معادلات نرمال منجر به نتایج روبرو می‌شود:

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X}$$
$$b_1 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}$$

تخمین زننده b_1 را نیز می‌توان به شکل روبرو ارائه داد:

$$b_1 = \frac{\sum_i X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_i X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

پس خطای مجموع مربعات عبارت است از: $SS_E = \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 - b_1^2\sum_i (X_i - \bar{X})^2$

عبارت اول در سمت راست بالا، کل مجموع مربعات تصحیح شده $(SS_{TC})Y_s$ است.

به $b_1^2\sum_i (X_i - \bar{X})^2$، مجموع مربعات ناشی از رگرسیون گفته می‌شود و با SS_R نشان داده می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$SS_E = SS_{TC} - SS_R$$

یا

$$SS_T = \sum_i Y_i^2 = n\bar{Y}^2 + SS_E + SS_R = SS_M + SS_E + SS_R$$

می‌توان به آنالیز رگرسیون به منزله فرایند تفکیک کل مجموع مربعات (SS_T) در سه بخش نگریست:

- مجموع مربعات ناشی از میانگین (SS_M)
- مجموع مربعات ناشی از خطا (SS_E) یا انحراف از خط رگرسیون
- مجموع مربعات ناشی از رگرسیون (SS_R)

به بیان دیگر، هر Y_i متشکل از سه بخش است (یا در سه بخش تفکیک می‌شود) که هر یک منجر به مجموع مربعات مربوط به خود می‌شوند.

$$Y_i = \bar{Y} + (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i) \quad i = 1, 2, \ldots n$$

می‌توان نشان داد که $SS_E / (n-۲)$ یک تخمین زننده بی‌سو (unbiased) از $\sigma^۲$ است.
همچنین $SS_E / \sigma^۲$ دارای توزیع کای با درجه آزادی (n – ۲) است.

❐ تخمین بازه‌ای در رگرسیون خطی ساده

پیش از تعیین بازه‌های اطمینان یا تعیین مراحل آزمون مورد استفاده، یادآوری می‌کنیم که سه فرض در مدل $Y = B_۰ + B_۱X$ وجود داشت:
متغیر مستقل X متغیری معین و بدون خطا است.
به ازای X معین، توزیع Y نرمال با میانگین و واریانس آن $\mu_{Y/X} = \beta_۰ + \beta_۱X$ و $\sigma_{Y/X}^۲ = \sigma^۲$ است.
واریانسی که به شکل $\sigma^۲ = \sigma_\varepsilon^۲$ نشان داده می‌شود، برای همه Xها یکسان است. همان طور که در پیش اشاره شده، تخمین‌زننده $\sigma^۲$ عبارت است از:

$$S^۲ = MS_E = \frac{SS_E}{n-۲} = \frac{\sum_i \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^۲}{n-۲} = \frac{\left(\sum_i Y_i^۲ - \left(\sum_i Y_i\right)^۲\right)/n}{n-۲}$$

در مورد یک رگرسیون خطی واریانس‌های تخمین زننده‌های $\beta_۱$ و $\beta_۰$ عبارت است از:

$$S_{b_۱}^۲ = \frac{S^۲}{\sum_i \left(X_i - \bar{X}\right)^۲} = \frac{S^۲}{\left(\sum_i X_i^۲ - \left(\sum_i X_i\right)^۲\right)/n}$$

$$S_{b_۰}^۲ = \left[\frac{۱}{n} + \frac{\bar{X}^۲}{\sum_i \left(X_i - \bar{X}\right)^۲}\right] \times S^۲ = \left[\frac{۱}{n} + \frac{\left(X - \bar{X}\right)^۲}{\left(\sum_i X_i^۲ - \left(\sum_i X_i\right)^۲\right)/n}\right] \times S^۲$$

$$S_{\hat{\mu}_{Y/X}}^۲ = \left[\frac{۱}{n} + \frac{\left(X - \bar{X}\right)^۲}{\sum_i \left(X_i - \bar{X}\right)^۲}\right] \times S^۲ = \left[\frac{۱}{n} + \frac{\left(X - \bar{X}\right)^۲}{\left(\sum_i X_i^۲ - \left(\sum_i X_i\right)^۲\right)/n}\right] \times S^۲$$

$$S_{\hat{Y}}^۲ = \left[۱ + \frac{۱}{n} + \frac{\left(X - \bar{X}\right)^۲}{\sum_i \left(X_i - \bar{X}\right)^۲}\right] \times S^۲ = \left[۱ + \frac{۱}{n} + \frac{\left(X - \bar{X}\right)^۲}{\left(\sum_i X_i^۲ - \left(\sum_i X_i\right)^۲\right)/n}\right] \times S^۲$$

به ازای سطح اطمینان α، بازه اطمینان $۱۰۰ \times (\alpha - ۱)$ مربوط به پارامتر $\beta_۱$ عبارت است از:

$$\left(b_۱ - S_{b_۱} \times t_{n-۲;۱-\alpha/۲}\right) < \beta_۱ < \left(b_۱ + S_{b_۱} \times t_{n-۲;۱-\alpha/۲}\right)$$

و در مورد پارامتر $\beta_۰$،

$$\left(b_۰ - S_{b_۰} \times t_{n-۲;۱-\alpha/۲}\right) < \beta_۰ < \left(b_۰ + S_{b_۰} \times t_{n-۲;۱-\alpha/۲}\right)$$

با سطح اطمینان $۱۰۰ \times (\alpha - ۱)$، بازه اطمینان مربوط به $\mu_{Y/X}$ عبارت است از:

$$\left(\hat{Y} - S_{\hat{\mu}_{Y/X}} \times t_{n-۲;۱-\alpha/۲}\right) < \mu_{Y/X} < \left(\hat{Y} + S_{\hat{\mu}_{Y/X}} \times t_{n-۲;۱-\alpha/۲}\right)$$

بازه اطمینان برای هر مقدار Y در مقدار X متناظر آن و با سطح اطمینان α عبارت است از:

$$\left(\hat{Y} - S_{\hat{Y}} \times t_{n-۲;۱-\alpha/۲}\right) < Y < \left(\hat{Y} + S_{\hat{Y}} \times t_{n-۲;۱-\alpha/۲}\right)$$

باید توجه داشت که بازه اطمینان $\mu_{Y/X}$ باریک‌تر از بازه اطمینان مربوط به Y است. علت را می‌توان در رابطه روبرو جستجو کرد: $S_{\hat{Y}}^۲ = S_{\hat{\mu}_{Y/X}}^۲ + S^۲$

مثال: یک مرحله میانی در یک فرآیند، واکنش $A \rightarrow B$ است. در حالی که این واکنش در فشار محیط رخ می‌دهد، دما از ۱ الی ^{o}C ۱۰ تغییر داده می‌شود. هدف به دست آوردن رابطه بین میزان تبدیل A و دما است. داده‌های زیر در دست است:

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
Y	۳	۵	۷	۱۰	۱۱	۱۴	۱۵	۱۷	۲۰	۲۱

که در آن X دما و Y بازدهی است. پس از به دست آوردن مدل رگرسیون، بازه‌های اطمینان برای پارامترهای رگرسیون محاسبه می‌شود.

فرض کنید که مدل $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$، این داده‌های تجربی را به صورت مناسبی توصیف می‌کند. به کمک داده‌های موجود مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_i X_i = ۵۵/۰ \quad \sum_i Y_i = ۱۲۳/۰ \quad \sum_i X_i Y_i = ۸۴۴/۰$$

$$\sum_i X_i^۲ = ۳۸۵/۰ \quad \sum_i Y_i^۲ = ۱۸۵۵/۰ \quad \sum_i X_i \sum_i Y_i = ۶۷۶۵/۰$$

$$\left(\sum_i X_i\right)^۲ = ۳۰۲۵/۰ \quad \left(\sum_i Y_i\right)^۲ = ۱۵۱۲۹/۰ \quad n = ۱۰$$

$$\bar{X}=\frac{\sum_i X_i}{n}=۵/۵ \quad \bar{Y}=\frac{\sum_i Y_i}{n}=۱۲/۳$$

$$\sum\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)=\sum X_i Y_i-\frac{\sum_i X_i \sum_i Y_i}{n}=۱۶۷/۵$$

$$\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^۲=\sum_i X_i^۲-\frac{\left(\sum_i X_i\right)^۲}{n}=۸۲/۵$$

$$\sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)^۲=\sum_i Y_i^۲-\frac{\left(\sum_i Y_i\right)^۲}{n}=۳۴۲/۱$$

$$b_۱=\frac{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)}{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^۲}=۲/۰۳$$

$$b_۰=\bar{Y}-b_۱\bar{X}=۱/۱۳$$

$$\hat{Y}=۱/۱۳+۲/۰۳X$$

$$SS_E=\sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)^۲-b_۱^۲\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^۲=۲/۰۲۵$$

$$S^۲=\frac{SS_E}{n-۲}=۰/۲۵۳۱ \quad S=\sqrt{S^۲}=۰/۵۰۳$$

در بازه اطمینان ۹۵٪ برای $\beta_۰$ داریم:

$$S_{b_۰}=\left[\frac{۱}{۱۰}+\frac{۵/۵^۲}{۸۲/۵}\right]\times ۰/۵۰۳=۰/۳۴۴$$

$$\left(۱/۱۳-۰/۳۴۴\times t_{۸;۱-۰/۰۲۵}\right)<\beta_۰<\left(۱/۱۳+۰/۳۴۴\times t_{۸;۱-۰/۰۲۵}\right)$$

$$\left(۱/۱۳-۰/۳۴۴\times ۲/۳۰۶\right)<\beta_۰<\left(۱/۱۳+۰/۳۴۴\times ۲/۳۰۶\right)$$

$$۰/۳۴۴<\beta_۰<۱/۹۲۶$$

در بازه اطمینان ۹۵٪ برای $\beta_۱$ داریم:

$$S_{b_۱}=\frac{۰/۵۰۳}{\sqrt{۸۲/۵}}=۰/۰۵۵۴$$

$$\left(۲/۰۳-۲/۳۰۶\times ۰/۰۵۵۴\right)<\beta_۱<\left(۲/۰۳+۲/۳۰۶\times ۰/۰۵۵۴\right)$$

$$۱/۹۰۳<\beta_۱<۲/۱۵۸$$

❐ آنالیز واریانس رگرسیون خطی ساده

یادآوری: $SS_T = SS_M + SS_E + SS_R$

مجموع مربعات ناشی از خطا:

$$MS_E = \frac{SS_E}{n-2}$$

این کمیت تخمینی بدون‌سو از واریانس خطا (σ^2) است زیرا

$$E(MS_E) = \sigma^2$$

مقدار مورد انتظار مربع میانگین رگرسیون ($MS_R = SS_R/1$)، تخمینی سودار از واریانس (σ^2) است اگر β_1 برابر با **صفر نباشد** زیرا.

$$E(MS_R) = E\left(\frac{SS_R}{1}\right) = \sigma^2 + \beta_1^2 \sum (X_i - \bar{X})^2 > \sigma^2$$

برای آزمودن این که β_1 برابر با صفر است یا خیر (فرضیه صفر)، می‌توان از از آزمون F استفاده نمود:

$$F = \frac{MS_R}{MS_E}$$

این نسبت مربعات میانگین ناشی از رگرسیون و خطا، دارای توزیع F با درجات آزادی $f_1 = 1$ و $f_2 = n - 2$ است اگر فرضیه صفر ($\beta_1 = 0$) فرضیه‌ای درست باشد.

اما اگر مقدار F به دست آمده بزرگ‌تر از مقدار F در جدول باشد ($F > F_{1,n-2;1-\alpha}$)، آن‌گاه فرضیه صفر رد می‌شود و β_1 مخالف صفر است.

آنالیز واریانس رگرسیون خطی به روش معمول در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ANOVA

Source of variation	f	SS	MS	E(MS)	Test statistic
Average (β_0)	1	$n\bar{Y}^2 = SS_M$	$MS_M = SS_M$	–	–
Regression (β_1)	1	$b_1 \sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = SS_R$	$MS_R = SS_R$	$\sigma^2 + \beta_1^2 \sum_i (X_i - \bar{X})^2$	$\frac{MS_R}{MS_E}$
Error or residual	n-2	$\sum_i \left(Y_i - \widehat{Y}_i\right)^2 = SS_E$	$MS_E = SS_E/(n-2)$	σ^2	
Total	n	$\sum_i Y_i^2 = SS_T$	–	–	–

همچنین استفاده از آنالیز واریانس در مواردی که کل مجموع مربعات (SS_T) نسبت به میانگین مجموع مربعات (SS_M) تصحیح شده است، امری مرسوم است. به چنین مجموع مربعاتی، کل مجموع مربعات تصحیح شده ($SS_{TC} = SS_T - SS_M$) گفته می‌شود. چنین آنالیز واریانسی در جدول زیر نشان داده می‌شود.

جدول ANOVA

	f	SS	MS	Test statistic
Regression (β_1)	1	$b_1\left[\sum_i X_i Y_i - \left(\sum_i X_i\right)\left(\sum_i Y_i\right)\Big/ n\right]$	$MS_R = SS_R$	$\frac{MS_R}{MS_E}$
Error or residual	n-2	$\sum_i \left(Y_i - \widehat{Y}_i\right)^2$	$MS_E = \frac{SS_E}{(n-2)}$	–
Total corrected sum	n-1	$\sum_i Y_i^2 - \left(\sum_i Y_i\right)^2 \Big/ n$	–	–

مثال: آنالیز واریانس را در مورد مثال قبل انجام دهید. با توجه به جدول زیر،

Source of variation	f	SS	MS	E(MS)	Test statistic
Average β_0	1	1512.900	1512.900	–	–
Regression β_1	1	340.075	340.075	$\sigma^2 + 82,5 \cdot \hat{\beta}_1^2$	$\frac{340,075}{0,2531} = 1343,6$
Residual	8	2.025	0.2531	σ^2	–
Total	10	1855.000	–	–	–

و با استفاده از داده‌های مساله، مقدار MS_R و MS_E محاسبه و آماره F تعیین می‌شود. از آن جایی که مقدار F محاسبه شده برابر با ۱۳۴۳/۶ است، و نیز مقدار ۵/۳۲ = $F_{۱, ۸; ۰/۹۵}$ است (جدول)، فرضیه صفر مبنی بر بی‌تأثیر بودن آماری β_1 رد می‌شود؛ به عبارت دیگر β_1 با سطح اطمینان ٪۹۵ به لحاظ آماری معنادار است.

❐ عدم تطابق رگرسیون خطی ساده[1]

عدم تطابق[2] رگرسیون به معنای میزان مناسب بودن رگرسیون[3]

1. Lack Of Fit
2. Lack Of Fit
3. Adequacy Of Regression

آزمون ارزیابی عدم تطابق[1] رگرسیون، مجموع مربعات باقی‌مانده (خطای باقیمانده) را به دو دسته تقسیم می‌کند: (۱) مجموع مربعات عدم تطابق[2] و (۲) مجموع مربعات خطای آزمایش.

نکته در این جا است که تکرار آزمون در این جا (و به طور کلی) به این معنا است که مقدار ورودی (X) مشابهی در چندین نوبت در نظر گرفته شود، و به ازای آن مقادیر خروجی (Y) خوانده شود. (نه این که X را ثابت نگه داریم و چند بار Y را بخوانیم)

فرض کنید که از میان کل n مورد X_S، تنها k مورد X_S متمایز وجود دارد $(n > k)$ که فرکانس آنها به ترتیب n_1، n_2، ...، n_k است $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$.

مجموع مربعات خطای آزمایشگاهی مربوط به n_i مورد X_i، که Y_S متناظر آن است عبارت است از:

$$\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_j - \bar{Y}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n_i} Y_j^2 - n_i \bar{Y}^2 = \left(SS_E\right)_i$$

مجموع مربعات آمیخته ناشی از خطای آزمایشگاهی عبارت است از: $$SS_E = \sum_{i=1}^{k}\left(SS_E\right)_i$$

همچنین درجه آزادی عبارت است از: $$\sum_{i=1}^{k}\left(n_i - 1\right) = n - k$$

میانگین مجموع مربعات ناشی از خطای آزمایشگاهی عبارت است از: $$MS_E = \frac{MS_E}{n-k}$$

مجموع مربعات خطای باقی مانده معمول (با درجه آزادی $n - 2$):

$$SS_{RES} = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}\right)^2$$

پس مجموع مربعات عدم تطابق عبارت می‌شود از:

$$SS_{LF} = SS_{RES} - SS_E$$

به ازای درجه آزادی $n - 2 - (n - k) = k - 2$، میانگین مجموع مربعات عدم تطابق عبارت است از:

$$MS_{LF} = \frac{SS_{LF}}{k-2}$$

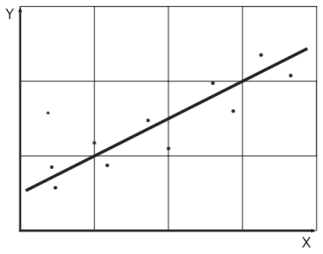
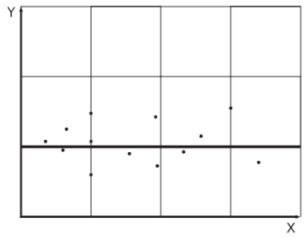
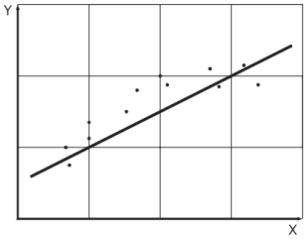
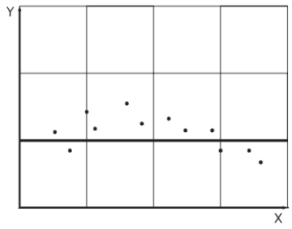
اگر مقدار F به دست آمده کمتر از مقدار F جدول بود، رگرسیون خطی با سطح اطمینان مفروض قابل قبول است (فرضیه صفر پذیرفته می‌شود).

---

1. Lack Of Fit
2. Lack Of Fit

اگر آنالیز واریانس F در مورد عدم تطابق به لحاظ آماری معنادار باشد؛ به این معنا است کـه رگرسـیون خطی نتایج آزمایشگاهی را به حد کافی توصیف نمی‌کند و باید علت عدم تطابق را جستجو نمود.
به لحاظ آماری معنادار نباشد، بی‌شک تطابق مناسبی برقرار است.

وضعیت‌های رگرسیون خطی شاخص

مدل: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ تطابق رگرسیون خطی معنادار است. از مدل $\hat{Y} = b_0 + b_1 X$ استفاده شود. 	مدل: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ تطابق رگرسیون خطی معنادار نیست. از مدل $\hat{Y} = \hat{Y}$ استفاده شود. 
مدل: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ عدم تطابق معنادار رگرسیون خطی معنادار است. از مدل $\hat{Y} = b_0 + b_1 X + b_{11} X^2$ استفاده شود. 	مدل: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ عدم تطابق معنادار رگرسیون خطی معنادار نیست. از مدل $\hat{Y} = b_0 + b_1 X + b_{11} X^2$ استفاده شود. 

مثال: آنالیز واریانس مدل رگرسیون خطی داده‌های آزمایشگاهی زیر را انجام دهید.

No	X	Y	No	X	Y	No	X	Y
1	1.3	2.3	9	3.7	1.7	17	5.3	3.5
2	1.3	1.8	10	4.0	2.8	18	5.3	2.8
3	2.0	2.8	11	4.0	2.8	19	5.3	2.1
4	2.0	1.5	12	4.0	2.2	20	5.7	3.4
5	2.7	2.2	13	4.7	5.4	21	6.0	3.2
6	3.3	3.8	14	4.7	3.2	22	6.0	3.0
7	3.3	1.8	15	4.7	1.9	23	6.3	3.0
8	3.7	3.7	16	5.0	1.8	24	6.7	5.9

پس از انجام محاسبات لازم، رگرسیون خطی $\hat{Y} = ۱/۴۳۶ + ۰/۳۳۸X$ به دست می‌آید. عدم تطابق این مدل رگرسیون را بررسی می‌کنیم؛

جدول آنالیز واریانس داده‌های فوق به قرار زیر است:

Source of variation	f	SS	MS	F	F_T
Regression β_1	1	6.326	6.326	6.569	$F_{1;22;0.95}$=4.30
Residual	22	21.192	0.963	–	–
Corrected total	23	27.518	–	–	–

روند محاسبه واریانس خطای آزمایشگاهی (که به آن خطای خالص، pure error، نیز گفته می‌شود)، به قرار زیر است:

S_E برای $X = ۱/۳$، عبارت است از:

$$(SS_E)_{X=۱/۳} = \sum_{j=۱}^{nx=۱/۳} Y_j^{۲} - n_{x=۱/۳} \times Y^{-۲} = ۲/۳^{۲} + ۱/۸^{۲} - ۲\left(\frac{۲/۳ + ۱/۸}{۲}\right)^{۲}$$

$$= ۰/۵(۲/۳ - ۱/۸)^{۲} = ۰/۱۲۵$$

که درجه آزادی آن $f = n - k = ۲ - ۱ = ۱$ است.

پس از انجام محاسبات این چنینی در مورد سایر داده‌های تکراری، جدول زیر به دست می‌آید:

Value X	$\sum_{j}^{n_i}\left(Y_j-\bar{Y}\right)^2$	Degrees of freedom f
1.3	0.125	1
2.0	0.845	1
3.3	2.000	1
3.7	2.000	1
4.0	0.240	2
4.7	6.260	2
5.3	0.980	2
6.0	0.020	1
Total	12.470	11

اکنون مجموع مربعات خطای آزمایشگاهی SS_E = ۱۲/۴۷۰ با درجه آزادی ۱۱ به دست می‌آید. پس می‌توان جدول آنالیز واریانس با واریانس عدم تطابق را به قرار زیر ارائه داد:

Source of variance	f	SS	MS	F	F_T
Regression β_1	1	6.326	6 ,326	$\frac{6.326}{0.963}=6.569$	$F_{1;22;0.95}$=4.30
Residual	22	21.192	0.963	–	–
Corrected total	23	27.518	–	–	–
Lack of fit	11	8.722	0.793	$\frac{0.793}{1.134}=0.699$	$F_{11;11;0.95}$=2.82
Pure error	11	12.470	1.134	–	–

از آنجایی که مقدار F محاسبه شده (۰/۶۹۹) کمتر از F جدول (۲/۸۲) است، عدم تطابقی به لحاظ آماری وجود ندارد و رگرسیون به لحاظ آماری معنادار است (قابل قبول است).

⊡ آنالیز همبستگی[1]

قوی‌ترین و نزدیک‌ترین رابطه بین متغیرها، رابطه تابعی[2] است.

رابطه تابعی هنگامی وجود دارد که هر مقدار از یک متغیر مستقل مرتبط با یک مقدار معین متغیر وابسته باشد (تعریف تابع).

1. Correlation Analysis
2. Functional Relationship

به رابطه‌ای ضعیف بین متغیرها، که در معرض اختلاف‌ها و انحراف‌های بزرگی قرار دارد، همبستگی[1] گفته می‌شود.

تکنیک‌های آماری که برای سنجش مقدار ارتباط بین متغیرها توسعه یافته است، موسوم به روش‌های همبستگی[2] هستند.

آنالیز آماری که برای تعیین درجه همبستگی انجام می‌شود، آنالیز همبستگی نام دارد.

مثلاً مساحت دایره و شعاع آن دارای رابطه تابعی هستند اما متغیرهایی که ارتباط بین نرخ سوختن و فشار پیشرانه یک موشک را بیان می‌کنند، یک رابطه همبستگی دارند.

برای سنجش همبستگی از ضریب همبستگی استفاده می‌کند.

ضریب همبستگی بیان کننده میزان تطابق مناسب معادله رگرسیون با داده‌های تجربی است.

همچنین، ضریب همبستگی در ارتباط تنگاتنگی با خطای استاندارد تخمین است.

برای سنجش قدرت و توانایی رابطه خطی بین X و Y از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$Y_i - \bar{Y} = \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right) + \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)$$

اگر رابطه‌ای کامل و تابعی بین عوامل X و Y وجود داشت، همه مقادیر Y_i آزمایشگاهی باید برابر با مقادیر حاصل از رگرسیون ($\hat{Y}_i$) باشد.

در چنین حالتی، انحرافی بین مقادیر تجربی یک متغیر وابسته با رگرسیون به چشم نمی‌خورد.

به عبارت دیگر، $Y_i = \hat{Y}$ است و $Y_i - \hat{Y}$ برابر با صفر می‌شود (معادله بالا).

مشابه با آنالیز مجموع مربعات، می‌توان توصیف کاملی از داده‌های تجربی توسط معادله رگرسیون به دست آورد.

نکته دیگر، هنگامی مطرح می‌شود که رابطه خطی بین متغیرها وجود نداشته باشد.

در چنین حالت‌هایی، همه مقادیر رگرسیون واقعی ($\hat{Y}_i$) برابر با متوسط جبری متغیر وابسته ($\bar{Y}$) است.

ضریب تشخیص (ضریب تعیین کننده[3]) مطابق با همان توصیف قبلی از r^2 است:

$$r^2 = \frac{SS_R}{SS_{TC}} = \frac{SS_{TC} - SS_E}{SS_{TC}} = 1 - \frac{SS_E}{SS_{TC}}$$

1. Correlation
2. Correlation Methods
3. Determination Coefficient

ضریب تشخیص آن نسبتی از کل تغییرپذیری متغیر وابسته است که توسط معادلـه رگرسـیون در متغیرهای مستقل به حساب آمده است.

r^2 معادل با ۱، نشان دهنده آن است که معادله رگرسیون تطابق داده شده، همه تغییرپذیری مقادیر متغیر وابسته در نمونه داده‌ها را در نظر گرفته است.

از سوی دیگر، r^2 برابر با ۰، حاکی از آن است که معادله رگرسیون هیچ یک از این تغییرپـذیری‌هـا را لحاظ نکرده است.

ریشه دوم ضریب تشخیص (r) موسوم به ضریب همبستگی است.

ضریب همبستگی معیاری از قدرت رابطه است و مقداری بین ۱- و ۱+ دارد.

معیارهای تجربی زیر پذیرفته شده هستند:

ضریب همبستگی تا ۰/۳۰، به معنای همبستگی ضعیف و نامعتبر است.

ضریب همبستگی از ۰/۵۰ الی ۰/۷۰، نشان دهنده معنادار بودن رابطه است و اهمیت کاربردی آن است.

ضریب همبستگی بیشتر از ۰/۹۰ به معنای رابطه قوی است.

در بررسی‌های آماری اغلب مرسوم‌تر اسـت کـه ضـریب همبسـتگی تعیـین شـود و بعـد معادلـه رگرسیون.

❐ همبستگی در رگرسیون خطی

در مدل رگرسیون خطی ساده ($Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$)، مجموع مربعات ناشی از رگرسـیون عبـارت هستند از:

$$SS_R = b_1^2 \sum_i \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

از آنجایی که:

$$b_1 = \frac{\sum_i \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_i \left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

پس در مدل رگرسیون خطی ساده می‌توان داشت:

$$r^2 = \frac{SS_R}{SS_{TC}} = \frac{b_1^2 \sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\sum_i (Y_i - \bar{Y})} = \frac{\left[\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})\right]^2}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}$$

پس ضریب تشخیص (r) یا ضریب همبستگی، عبارت است از:

$$r = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\left[\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2\right]^{0.5}}$$

❐ ضریب تشخیص – معناداری آماری رگرسیون – عدم تطابق رگرسیون

ضریب تشخیص آن نسبتی از تغییرپذیری کل متغیر وابسته است که توسط معادلـه رگرسـیون در متغیر مستقل لحاظ شده است.

اما باید توجه داشت که مقدار بالای ضریب تشخیص همزمـان بـه معنـای معنـادار بـودن آمـاری رگرسیون نیست.

در واقع، وقتی که تعداد مشاهدات از تعداد عبارت‌هـای معادلـه رگرسـیون بیشـتر اسـت، ضـریب تشخیص می‌توان بزرگ باشد حتی اگر رابطه‌ای درسـت بـین متغیرهـای وابسـته و مسـتقل وجـود نداشته باشد.

شانس آن که به ازای سه مشاهده مقدار r^2 برابر با ۰/۹۷ باشد (در یک معادلـه رگرسـیون خطـی ساده)، یک به ده است حتی اگر X کاملاً به Y نامربوط باشد.

از سوی دیگر، به ازای ۱۰۰ مشاهده ضریب همبستگی ۰/۰۷ به اندازه کافی بـزرگ اسـت کـه بـه لحاظ آماری برای تطابق رگرسیون خطی با سطح اطمینان ۱٪ کفایت کند.

در حالت کلی، جدول زیر نشان می‌دهد که چه مقـادیری از r^2 بـرای معنـادار بـودن آمـاری یـک رگرسیون خطی کفایت می‌کند.

مقادیر r^2 رگرسیون خطی ساده

Sample size	Statistical significance level		
	α=0.1	α=0.05	α=0.01
3	0.9756	0.9938	0.9998
4	0.810	0.9030	0.9800
5	0.65	0.77	0.92
6	0.53	0.66	0.84
7	0.45	0.57	0.77
8	0.39	0.50	0.70
9	0.34	0.44	0.64
10	0.03	0.40	0.59
11	0.27	0.36	0.54
12	0.25	0.33	0.50
13	0.23	0.31	0.47
14	0.21	0.28	0.44
15	0.19	0.26	0.41
20	0.14	0.20	0.31
25	0.11	0.16	0.26
30	0.09	0.13	0.22
40	0.07	0.10	0.16
50	0.05	0.08	0.13
100	0.03	0.04	0.07

توجه کنید که جدول بالا تنها در مورد معادله رگرسیون خطی ساده معتبر است.

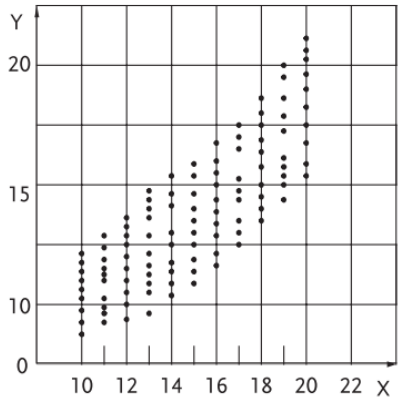
معنادار بودن کاربردی و معنادار بودن آماری هم‌ارز نیستند.

نمی‌توان با نمونه‌ای کوچک، هیچ گواهی مبنی بر وجود یک رابطه رگرسیون معنادار به لحاظ آماری ارائه نمود حتی اگر رابطه آنها کاملاً قوی باشد.

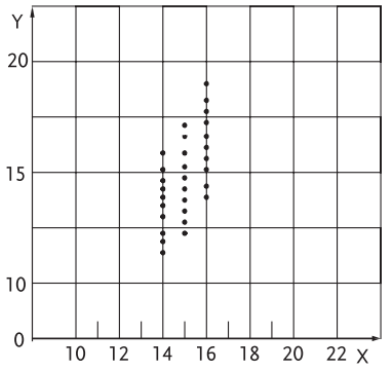
از سوی دیگر یک معادله رگرسیون هنگامی می‌تواند بـه لحـاظ آمـاری معنـادار باشـد کـه تعـداد مشاهدات زیادی (به اندازه کافی زیاد) در دسترس باشند.

همچنین مقدار r^2 مستقیما به بازه تغییرات متغیرهای مستقل وابسته است.

با فرض آن که مدل رگرسیون درست با داده‌ها تطابق داده شده است، هرچه بازه تغییر متغییرهای مستقل کوچک‌تر باشد، مقدار r^2 کمتر است.



نمودار داده‌ها با r^2 = ۰/۸۹



نمودار داده‌ها با r^2 = ۰/۲۱

شکل بالا: نمودار Y بر حسب X در مورد ۱۱۰ داده که مقادیر آنها (X) بین ۱۰ الی ۲۰ است.

شکل پایین: نمودار مربوط به ۳۰ داده در بازه ۱۴ الی ۱۶

بنابراین، مقدار بالای r^2 می‌تواند بازگوکننده این مطلب باشد که داده‌ها از یک بازه تغییرات بزرگ گرفته شده‌اند.

از سوی دیگر، مقدار پایین r^2 ممکن است ناشی از بازه محدود متغیرهای مستقل باشد.

توجه کنید که که r^2 = ۰/۹۹ در مورد یک رگرسیون خطی که به لحاظ آماری نیز معنادار است، الزاماً بدان مفهوم نیست که یک رگرسیون چند جمله‌ای مرتبه بالاتر نمی‌تواند تطابق بهتری با داده‌ها داشته باشد.

فصل



محاسبه عدم قطعیت در اندازه‌گیری‌های مرتبط با جوش

❖ اهداف آموزشی

- ❖ آشنایی با مباحث عملی محاسبات عدم قطعیت

❐ تمرین ۱

کارخانه‌ای لوله‌هایی به طول ۱۲ متر تولید می‌کند. ۴ نمونه از محصولات کارخانه تهیه شده و اندازه‌گیری می‌شود (نمونه‌هایی A تا D). دقت و صحت اندازه‌گیری‌ها را در ۴ نمونه با هم مقایسه کنید.

A: ۱۱/۹, ۱۱/۹, ۱۲, ۱۲/۱, ۱۲/۱
B: ۱۲, ۱۲/۸, ۱۱/۲, ۱۲/۱, ۱۱/۹
C: ۱۴, ۱۴/۱, ۱۳/۹, ۱۳/۹, ۱۴/۱
D: ۱۴, ۱۵, ۱۸, ۱۳, ۱۶

راهنمایی: استفاده از میانگین و واریانس

❐ تمرین ۲

یک خط‌کش فولادی ۱۰۰ft در دمای $68^{\circ}F$ کالیبره شده است. از این خط‌کش در دمای $92^{\circ}F$ برای اندازه‌گیری طولی استفاده می‌شود. خط‌کش طول ۳۵۸/۲۳ ft را نشان می‌دهد. مقدار واقعی طول چقدر بوده است؟ این خطا چه نوع خطایی است؟
ضریب انبساط حرارتی فولاد $0/000006 5 ft / ft.^{\circ}F$ می‌باشد.

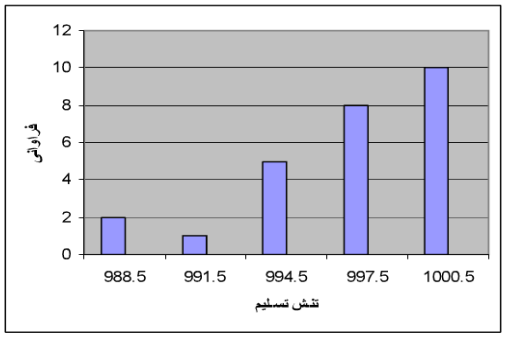
❐ تمرین ۳

سیستم دیجیتالی یک کوره دچار مشکل است. هنگامی که دمای واقعی کوره $250^{\circ}C$ است کوره دما را $254^{\circ}C$ و هنگامی که دمای واقعی کوره $530^{\circ}C$ است، سیستم دما را $583^{\circ}C$ نشان می‌دهد. اگر خطای مطلق تابعی خطی از دمای واقعی باشد، تعیین کنید هنگامی که دمای واقعی $323^{\circ}C$ است، این سیستم چند درصد خطا دارد.

❐ تمرین ۴

نمودار هیستوگرام داده‌های زیر را بکشید.

تنش تسلیم	فراوانی
۹۸۷-۹۹۰	۲
۹۹۰-۹۹۳	۱
۹۹۳-۹۹۶	۵
۹۹۶-۹۹۹	۸
۹۹۹-۱۰۰۲	۱۰



❐ تمرین ۵

میانگین (مقدار متوسط) داده‌های زیر را به دست آورید.

حل:

داده	فراوانی
۰	۱۳
۱	۱۳
۲	۸
۳	۵

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{0\times 13 + 1\times 13 + 2\times 8 + 3\times 5}{13+13+8+5}$$

$$\overline{x} = \frac{44}{39} = 1/128$$

❐ تمرین ۶

میانه را برای داده‌های ۵، ۷، ۳، ۳، ۲، ۱۱، ۹، ۸، ۱۲، ۲ به دست آورید.

حل: ابتدا داده‌ها را غیر نزولی مرتب می‌کنیم،

یعنی ۱۲، ۱۱، ۹، ۸، ۷، ۵، ۳، ۳، ۲، ۲. چون تعداد داده‌ها ۱۰ تا و زوج است:

میانه برابر ۶ است.

$$m = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{5+7}{2} = 6$$

❐ تمرین ۷

میانه را برای داده‌های جدول زیر به دست آورید.

X_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
f_i (فراوانی)	۸	۱۰	۱۲	۷	۵	۴	۴
g_i (فراوانی تجمعی)	۸	۱۸	۳۰	۳۷	۴۲	۴۶	۵۰

حل: ستون فراوانی تجمعی را محاسبه می‌کنیم. میانه در اولین ستونی است که فراوانی تجمعی آن از نصف تعداد داده بیشتر می‌شود. چون تعداد داده‌ها ۵۰ و زوج می‌باشد:

$$m = \frac{x_{۲۵} + x_{۲۶}}{۲} = \frac{۴+۴}{۲} = ۴$$

❐ تمرین ۸

برای داده‌های ۵، ۷، ۵، ۶، ۹، ۷، ۳، ۷، ۶، ۵ مد (نما) را تعیین کنید.

حل: چون فراوانی دو داده غیر مجاور ۵ و ۷ از سایر داده‌ها بیشتر است، پس داده‌ها دو نمایی هستند و $M_۲ = ۷, M_۱ = ۵$

❐ تمرین ۹

برای داده‌های ۵، ۲، ۳، ۸، ۵، ۶، ۳، ۵، ۲، ۸، ۳ مد را تعیین کنید.

حل: چون فراوانی دو داده مجاور ۵ و ۳ از سایر داده‌ها بیشتر است، پس مد (نما) برابر است با:

$$M = \frac{۳+۵}{۲} = ۴$$

❐ تمرین ۱۰

- میانگین، میانه، انحراف معیار و دامنه داده‌های زیر را به دست آورید.

X_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۱۳	۱۳	۸	۵	۱

حل:

$$\text{دامنه } R = ۴ - ۰ = ۴ \qquad \text{میانه } m = ۲ \qquad \text{میانگین } \bar{x} = \frac{۴۸}{۴۰} = ۱/۲$$

$$s = \sqrt{\frac{۱۳ \times (۰ - ۱/۲)^۲ + ۱۳ \times (۱ - ۱/۲)^۲ + ۸ \times (۲ - ۱/۲)^۲ + ۵ \times (۳ - ۱/۲)^۲ + ۱ \times (۴ - ۱/۲)^۲}{۴۰ - ۱}}$$

$$s = \sqrt{\frac{۴۸/۴}{۳۹}} = ۱/۱۱$$

❐ تمرین ۱۱

کارخانه‌ای دو نوع قطعه تولید می‌کند. قطعه اول دارای میانگین طول عمر ۲۰۰ ساعت با انحراف استاندارد ۱۱ ساعت و قطعه نوع دوم دارای میانگین طول عمر ۲۴۰ ساعت با انحراف استاندارد ۱۲ ساعت است. کدام نوع قطعه بهتر است؟

حل:

$$\bar{x}_۱ = ۲۰۰ \ , \ \sigma_{s۱} = ۱۱۱ \Rightarrow CV_۱ = \frac{۱۱}{۲۰۰} = ۰/۰۵۵ = ۵/۵\%$$

$$\bar{x} = ۲۴۰ \ , \ \sigma_{s۱} = ۱۲ \Rightarrow CV_۲ = \frac{۱۲}{۲۴۰} = ۰/۰۵ = ۵\%$$

$\bar{x}_۲ > \bar{x}$

$CV_۲ < CV_۱$ نوع دوم بهتر است زیرا

❐ تمرین ۱۲

سختی یک قطعه کار سرد شده از مغز تا سطح ۱۲۰، ۱۱۰ و ۹۷ می‌باشد. پس از آنیل اعداد سختی ۷۴، ۷۲ و ۶۸ به دست می‌آید. کدام حالت یکنواخت‌تر است؟

$$۱۲۰,۱۱۰,۹۷ \rightarrow \bar{H}_۱ = ۱۰۹, \sigma_{s۱} = ۱۱/۵۳ \Rightarrow CV_۱ = \frac{۱۱/۵۳}{۱۰۹} = ۰/۱۰۵$$

$$۷۴,۷۲,۶۸ \rightarrow \bar{H}_۲ = ۷۱/۳۳, \sigma_{s۱} = ۳/۰۵ \Rightarrow CV_۲ = \frac{۳/۰۵}{۷۱/۳۳} = ۰/۰۴۲$$

سختی در حالت دوم (پس از آنیل) پراکندگی کمتری دارد.

$$CV_۱ < CV_۲$$

$$CV_۱ = ۲/۵ CV_۲$$

❐ تمرین ۱۳

احتمال وجود داده‌ها را در بازه‌ی $\bar{x} \pm \sigma_s$ به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه $\pm$ داریم، بازه متقارن است. پس از $A_۲$ استفاده می‌کنیم. با توجه به جدول:

$$z = ۱ \Rightarrow A_z = ۶۸/۲۶\%$$

❐ تمرین ۱۴

احتمال مشاهده مقادیر بیش از انحراف معیار ۲ در یک توزیع نرمال استاندارد چقدر است؟

حل: با استفاده از جدول داریم:

$$z = ۲ \rightarrow P' = ۱ - ۰/۹۷۷۲۵ = ۰/۰۲۲۷۵$$

$$\Rightarrow P = ۲ \times ۰/۰۲۲۷۵ = ۰/۰۴۵۵$$

❐ تمرین ۱۵

وزن تعدادی پیچ تابع یک توزیع نرمال با میانگین ۲/۱ گرم و انحراف معیار ۰/۱۵ گرم است. چه درصدی از پیچ‌ها دارای وزن بیش از ۲/۵۵ گرم هستند؟

حل:

$$z = \frac{۲/۵۵ - ۲/۱}{۰/۱۵} = ۳ \Rightarrow$$

با توجه به جدول:

$$p = ۰/۰۰۱۳۵$$

$$P = ۱/۳۵\%$$

۱/۳۵٪ از پیچ‌ها دارای وزن بیش از ۲/۵۵ گرم هستند.

❐ تمرین ۱۶

استحکام میلگردهای یک توزیع‌کننده تابع توزیع نرمالی است که در آن میانگین ۲۴ و انحراف معیار ۳ می‌باشد. سفارش دهنده‌ای تقاضا نموده که حداقل ۹۵ درصد میلگردها بیش از ۲۰ واحد استحکام داشته باشند. آیا این میلگردها جوابگوی نیاز خریدار هستند؟

کسری از میل گردها که زیر ۲۰ واحد استحکام دارند

$$\Rightarrow P = ۰/۰۹۱۸$$

درصدی از میل گردها که بالای ۲۰ واحد استحکام دارند

$$P' = (۱ - ۰/۰۹۱۸) \times ۱۰۰ = ۹۰/۸۲\%$$

پس این میل گردها جوابگوی نیاز خریدار نیستند.

❐ تمرین ۱۷

در آزمایش تعیین نقطه ذوب یک فلز اعداد زیر به دست آمده است.

۴۵۲ ,۴۵۳ ,۴۵۲ ,۴۵۳ ,۴۵۴ ,۴۵۱

الف) مقدار متوسط، واریانس و انحراف معیار را محاسبه کنید.

ب) محدوده اعدادی که با احتمال ۹۵٪ جزو اندازه‌گیری باشند را تعیین کنید.

پ) احتمال اینکه جواب کمتر از $۴۵۴^{\circ}C$ باشد چقدر است؟ ت) احتمال اینکه جواب بیشتر از $۴۵۴^{\circ}C$ باشد چقدر است؟

حل:

الف)

$$\overline{T} = \frac{\sum_{i=۱}^{۶} T_i}{۶} = ۴۵۲/۵^{\circ}C$$

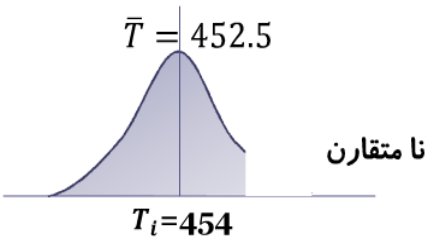
$$\sigma_s^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۶} (T_i - \overline{T})^۲}{۶ - ۱} = ۱/۱ \rightarrow \sigma_s = ۱/۰۴۸$$

ب) با توجه به جدول مربوط به مساحت دو طرفه، باید بازه‌ای را پیدا کنیم که ۹۵٪ مساحت در آن قرار دارد:

$A_۲ = ۰/۹۵ \quad or \quad A_۱ = ۰/۴۷۵$

$\Rightarrow z_۱ = ۱/۹۶$

$T_i = \bar{T} \pm z_۱\sigma_s = ۴۵۲/۵ \pm (۱/۹۶ \times ۱/۰۴۸)$



پ) سطح زیر منحنی را باید محاسبه کرد.

$z_i = \frac{T_i - \bar{T}}{\sigma_s} = \frac{۴۵۴ - ۴۵۲/۵}{۱/۰۴۸} = ۱/۴۳$ استفاده از جدول نامتقارن

$p(z = ۱/۴۳) = ۹۲/۳\%$

$p = ۰/۵ + A_۱ = ۰/۵ + ۰/۴۲۳ = ۰/۹۲۳ \quad or \quad ۹۲/۳\%$ استفاده از جدول متقارن

ت) $p' = ۱۰۰ - ۹۲/۳ = ۷/۷\%$

❐ تمرین ۱۸

اگر میانگین ابعاد اندازه‌گیری شده یک قطعه in ۰/۵ و انحراف معیار آن in ۰/۰۰۳۱۲ باشد، و قطعات در محدوده ابعاد in ۰/۵۰۰±۰/۰۰۵ مورد قبول باشند، محاسبه کنید که چند درصد قطعات تولیدی غیر قابل قبول است.

حل:

$z_i = \frac{۰/۵۰۵ - ۰/۵}{۰/۰۰۳۱۲} = ۱/۶$ **استفاده از جدول متقارن**

$P = A_۲(۱/۶) = ۰/۸۹$

$P' = ۱۰۰ - ۸۹ = ۱۱\%$ **درصد قطعات مردود**

❐ تمرین ۱۹

در مثال قبل اگر میانگین ابعاد ۰/۵۰۲ in و انحراف معیار ۰/۰۰۵ in باشد، محاسبه کنید که چند درصد قطعات تولیدی رد می‌شود. (قطعات در محدوده ابعاد ۰/۵۰۰±۰/۰۰۵ in مورد قبول هستند)

حل: در این حالت محدوده نسبت به میانگین نامتقارن است.

$$z_1 = \frac{0/505 - 0/502}{0/005} = 0/6$$

$$z_1 = \frac{0/495 - 0/502}{0/005} = 1/4$$

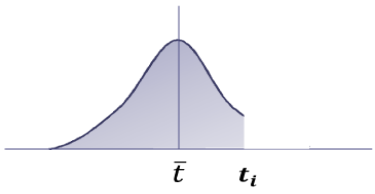
$$P_1 = A_1\left[Z_1, +\infty\right] = 0/2743$$

$$P_2 = A_1\left[-\infty, z_2\right] = 0/0808$$

$P = 0/3551$ or $35/51\%$ **درصد قطعات مردود**

❐ تمرین ۲۰

یک کارخانه زمان لازم برای تولید یک قطعه را به طور میانگین ۲ ساعت و انحراف معیار را ۸ دقیقه تعیین کرده است. زمانی را که ۹۰٪ قطعات در این زمان یا زودتر از آن تولید می‌شود محاسبه کنید.



حل:

اگر به ما جدول متقارن داده باشند $\begin{cases} P = 0/5 + A_1\left[0, z_1\right] = 0/9 \\ A_1\left[0, z_1\right] = 0/4 \xrightarrow{\text{Table}} z_1 = 1/282 \end{cases}$

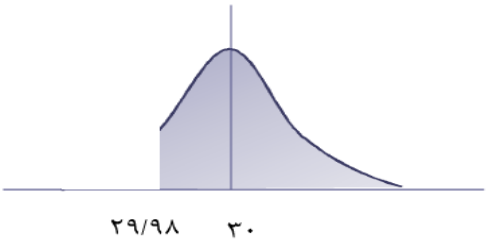
۲ ساعت و ۱۰ دقیقه

اگر به ما جدول نامتقارن داده باشند $P(Z=?)=A_{(z=?)}=۰/۹\Rightarrow z=۱/۲۸۲$

$$z_۱=\frac{t_۱-\bar{t}}{\sigma_۰}=۱/۲۸۲\rightarrow t_۱=۲/۱۷۰$$

❐ تمرین ۲۱

قطر داخلی پیستون‌هایی که توسط یک کارخانه ساخته می‌شود دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۰ میلی‌متر و انحراف معیار ۲٪ متر است. احتمال اینکه قطر داخلی یک پیستون بیش از ۲۹/۹۸ متر باشد را بیابید.



حل:

$$P(X>۲۹/۹۸)=P\left\{\frac{|x-\mu|}{\sigma}>\frac{۲۹/۹۸-۳۰}{\%۲}\right\}$$

$$=P(Z>-۱)=۰/۸۴۱۳$$

$$\Rightarrow P(X>۲۹/۹۸)=۰/۸۴۱۳$$

استفاده از جدول نامتقارن

❐ تمرین ۲۲

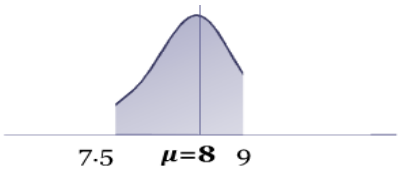
یک کارگاه تولید لوله، لوله‌هایی را تولید می‌کند که طول این لوله‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین ۸ و انحراف معیار ۰/۵ متر می‌باشد، مطلوب است:

الف) چند درصد لوله‌ها دارای طولی بین ۷/۵ تا ۹ متر هستند؟

ب) اگر در یک روز این کارگاه ۲۰۰ لوله تولید کند، چه تعداد از این لوله‌ها طولی بیش از ۹/۲ متر دارند؟

پ) ۹۷/۵٪ از لوله‌های تولید شده در این کارگاه طولشان از چه مقداری کمتر است؟

حل:



استفاده از جدول نامتقارن

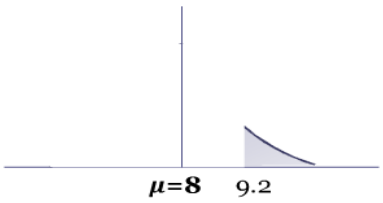
الف)

$$P(۷/۵ < X < ۹) = P\left(\frac{۷/۵ - ۸}{۰/۵} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{۹-۸}{۰/۵}\right)$$
$$= P(-۱ < Z < ۲) = P(Z < ۲) - P(-۱ < Z)$$

$$P(-۱ < Z) = ۱ - P(Z < ۱) = ۱ - ۰/۸۴۱۳ = ۰/۱۵۸۷$$
$$P(Z < ۲) = ۰/۹۷۷۲$$

$$P(-۱ < Z < ۲) = ۰/۹۷۷۲ - ۰/۱۵۸۷$$
$$\Rightarrow P(۷/۵ < X < ۹) = ۰/۸۱۸۵ \quad \text{or} \quad ۸۱/۸۵\%$$

ب)

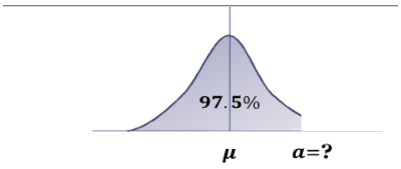


استفاده از جدول نامتقارن

$$P(X > ۹/۲) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{۹/۲ - ۸}{۰/۵}\right)$$
$$= P(Z > ۲/۴) = ۱ - P(Z \le ۲/۴)$$
$$\Rightarrow P(X > ۹/۲) = ۰/۰۰۸۲$$
$$n = ۲۰۰ \times ۰/۰۰۸۲ = ۱/۶۴ \approx ۲$$

تقریباً دو لوله طولی بیش از ۹/۲ متر دارند.

پ)



استفاده از جدول نامتقارن

$$P(X \prec a) = ۰/۹۷۵$$

$$P(Z < ?) = ۰/۹۷۵ \Rightarrow \text{Table} : Z < ۱/۹۶$$

$$\Rightarrow ۱/۹۶ = \frac{a - ۸}{۰/۵} \rightarrow a = ۸/۹۸$$

❐ تمرین ۲۳

فرض کنید وزن آهن موجود در یک کیلوگرم سنگ آهن معدن یک متغیر تصادفی X است که دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار مجهول σ گرم می‌باشد.

الف) اگر $P(X \geq ۵/۶) = ۰/۲۸۷۷$ مقدار $\sigma^۲$ را بیابید.

ب) احتمال اینکه در یک کیلوگرم سنگ آهن بین ۵ تا ۱۱ گرم آهن وجود داشته باشد را به دست آورید.

الف)

$$P(X \geq ۵/۶) = ۰/۲۸۷۷ \Rightarrow P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \geq \frac{۵/۶ - ۰}{\sigma}\right) = ۰/۲۸۷۷$$

$$P(Z \geq \frac{۵/۶ - ۰}{\sigma}) = ۰/۲۸۷۷ \Rightarrow P(Z < \frac{۵/۶ - ۰}{\sigma}) = ?$$

$$P(Z < \frac{۵/۶ - ۰}{\sigma}) = ۱ - ۰/۲۸۷۷ = ۰/۷۱۲۳$$

$$\Rightarrow \text{از جدول} : Z = ۰/۵۶$$

$$\Rightarrow \frac{۵/۶}{\sigma} = ۰/۵۶ \rightarrow \sigma^۲ = ۱۰۰$$

ب)

$$P(۵ < X < ۱۱) = P\left(\frac{۵ - ۰}{۱۰} < \frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{۱۱ - ۰}{۱۰}\right)$$

$$= P(۰/۵ < Z < ۱/۱) = ۰/۸۶۴۳ - ۰/۶۹۱۵ = ۰/۱۷۲۸$$

❐ تمرین ۲۴

فرض کنید که تولیدات پودری فلزی در بسته‌های ۱۰۰ گرمی بسته‌بندی می‌شود. اگر وزن بسته‌ها دارای توزیع نرمال باشد و مشاهده کنیم که ۵٪ بسته‌ها وزنی کمتر از ۸۳/۶ گرم و ۲٪ بسته‌ها وزنی بیش از ۱۲۰/۵ گرم دارند، میانگین و واریانس توزیع را به دست آورید.

$$۰/۰۵ = P(X > ۸۳/۶) \Rightarrow P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{۸۳/۶-\mu}{\sigma}\right)$$

$$۰/۰۲ = P(X > ۱۲۰/۵) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{۱۲۰/۵-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۸۳/۶-\mu}{\sigma} = -۱/۶۴ \\ \frac{۱۲۰/۵-\mu}{\sigma} = ۲/۰۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = ۱۰۰ \\ \Rightarrow \sigma = ۱۰ \end{cases}$$

❐ تمرین ۲۵

طول عمر موتورهای ساخته شده توسط یک کارخانه بر حسب سال، دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰ و انحراف معیار ۲ است. فرض کنید کارخانه موتورها را به مدت ۶ سال ضمانت کرده است.

الف) این کارخانه چند درصد موتورهایی را که فروخته است باید تعویض کند؟

ب) این کارخانه مدت ضمانت را چقدر باید انتخاب کند تا حداکثر ۱٪ موتورهای فروخته شده تعویض شود؟

$$P(t > ۶) = P(Z > -۲)$$

$$\Rightarrow ۱ - P(Z < -۲) = ۱ - ۰/۹۷۷۲ = ۰/۰۲۲۸$$

$$\Rightarrow ۰/۰۲۲۸ \times ۱۰۰\% = ۲/۲۸\%$$

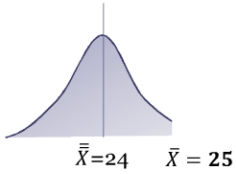
$$۰/۰۱ \geq P(t < a) = P\left(Z < \frac{a-۱۰}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a-۱۰}{۲} \leq -۲/۳۳ \Rightarrow a \leq ۵/۳۴$$

❐ تمرین ۲۶

یک شرکت تولیدی لاستیک اتوموبیل، لاستیک‌هایی تولید می‌کند که طول عمر آنها دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۴ و انحراف معیار ۲ ماه است. احتمال اینکه در یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی از لاستیک‌ها میانگین طول عمر کمتر از ۲۵ ماه باشد را بیابید.

حل: چون جمعیت نرمال است پس:



$$\bar{\bar{X}} \sim N(\bar{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^{۲})$$

$$\bar{\bar{X}} \sim N\left(۲۴, \frac{۲^{۲}}{۲۵}\right)$$

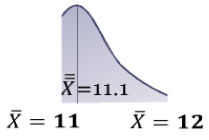
$$Z = \frac{۲۵ - ۲۴}{\frac{۲}{۵}} = ۲/۵$$

$$\Rightarrow P(\bar{\bar{X}} < ۲۵) = P(Z < ۲/۵) = ۰/۹۹۳۸$$

❐ تمرین ۲۷

فرض کنید سال‌های تحصیل در بین افراد بالغ در کشوری معین دارای میانگین ۱۱/۱ و انحراف معیار ۳ سال باشد. احتمال این که در یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از افراد بالغ این کشور متوسط تعداد سال‌های تحصیل بین ۱۱ تا ۱۲ سال باشد را بیابید.

حل: چون جمعیت نرمال نیست اما $n > ۳۰$، پس تقریباً:



$$\bar{\bar{X}} \sim N\left(۱۱/۱, \frac{۳^{۲}}{۱۰۰}\right) \qquad \bar{\bar{X}} \sim N(\bar{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^{۲})$$

$$\Rightarrow P(۱۱ < \bar{\bar{X}} < ۱۲) = P\left(\frac{۱۱ - ۱۱/۱}{\frac{۳}{۱۰}} < Z < \frac{۱۲ - ۱۱/۱}{\frac{۳}{۱۰}}\right)$$

$$= P(-۰/۳۳ < Z < ۳) = P(Z < ۳) - P(-۰/۳۳ < Z)$$
$$= P(Z < ۳) - (۱ - P(Z < ۰/۳۳))$$
$$P = ۰/۹۹۸۷ - ۰/۳۷۰۷ = ۰/۶۲۸$$

❐ تمرین ۲۸

درصد مس در یک محلول شیمیایی طی آزمایش‌های متعدد اندازه‌گیری شد. تجربه نشان داده که هیچ‌گونه خطای سیستماتیکی در اندازه‌گیری وجود ندارد. اگر انحراف معیار ۲ باشد، چند نمونه باید اندازه‌گیری شود تا خطای معیار به دست آمده کمتر از ۰/۶باشد؟

حل:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow ۰/۶ = \frac{۲}{\sqrt{n}}$$
$$۰/۳۶ = \frac{۴}{n} \Rightarrow \frac{۴}{۰/۳۶} = ۱۱/۱۱$$
$$\Rightarrow n \geq ۱۲$$ حداقل ۱۲ نمونه

❐ تمرین ۲۹

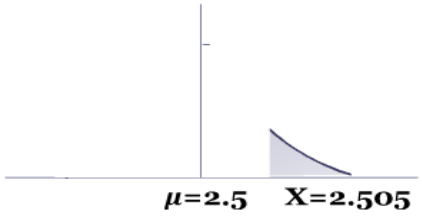
قطر تعدادی شفت تابع یک توزیع نرمال با میانگین ۲/۵ سانتی‌متر و انحراف معیار ۰/۰۰۹ سانتی‌متر می‌باشد.

خطای معیار برای ۹ نمونه چقدر است؟

چند درصد از شفت‌ها از ۲/۵۰۵ سانتی‌متر بزرگتر هستند؟

حل:

$$\sigma_m = \frac{۰/۰۰۹}{\sqrt{۹}} = ۳ \times ۱۰^{-۳}$$
$$z = \frac{۲/۵۰۵ - ۲/۵}{۰/۰۰۹} = ۰/۵۵$$
$$\Rightarrow P = ۰/۲۹۱۲ = ۲۹/۱۲\%$$



❐ تمرین ۳۰

اگر میانگین نمونه‌ای برابر ۱۲/۹۱ باشد، فاصله اطمینان ۹۵ درصد را برای مقدار واقعی (یا حدود) $\overline{X}$ به دست آورید. خطای معیار ۰/۵۸ است.

حل:

$$\rightarrow z_i = ۱/۹۶$$

محدوده اطمینان = $\overline{x} \pm z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = ۱۲/۹۱ \pm ۱/۹۶ \times ۰/۵۸ = (۱۱/۷۷۳, ۱۴/۰۴۷)$

❐ تمرین ۳۱

یک تولیدکننده، لامپ‌هایی تولید می‌کند که انحراف معیار طول عمر آن‌ها ۴۰ ساعت است. اگر یک نمونه تصادفی ۳۶ تایی دارای حد متوسط عمر ۸۷۰ ساعت باشد، یک فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای حد متوسط عمر تمام لامپ‌های تولیدی این کارخانه به دست آورید.

حل:

با توجه به جدول:

$$\rightarrow z_i = ۱/۹۶$$

$$CL = \overline{x} \pm ۱/۹۶\frac{s}{\sqrt{n}} = ۸۷۰ \pm ۱/۹۶\frac{۴۰}{\sqrt{۳۶}} = (۸۵۶/۹۳, ۸۸۳/۰۷)$$

❐ تمرین ۳۲

قرار است یک آزمون سراسری برای دانش‌آموزان سال آخر دبیرستان برگزار شود. برای تعیین زمان لازم برای پاسخگویی یک نمونه ۱۰۰ تایی دانش‌آموز به طور تصادفی انتخاب گردیده و در مورد آنان امتحان به عمل می‌آید. میانگین و انحراف معیار استاندارد زمان پاسخ دانش‌آموزان به ترتیب ۵۸ و ۱۰ دقیقه به دست آمده است. یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین واقعی زمان آزمون محاسبه کنید.

با توجه به جدول:

$$\rightarrow z_i = ۱/۹۶$$

$$CL = \overline{x} \pm ۱/۹۶\frac{s}{\sqrt{n}} = ۵۸ \pm ۱/۹۶\frac{۱۰}{\sqrt{۱۰۰}} = ۵۸ \pm ۱/۹۶$$

❐ تمرین ۳۳

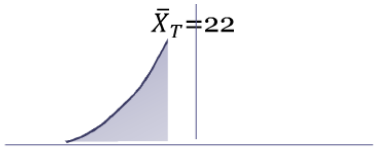
نمره یک درس در امتحان میان ترم دارای میانگین ۵ و انحراف معیار ۳ و در امتحان پایان ترم دارای میانگین ۶ و انحراف معیار ۴ می‌باشد. فرض کنید نمرات دو امتحان از یکدیگر مستقل بوده و هر یک دارای توزیع نرمال باشد. شخصی در این درس قبول می‌شود که ۲ برابر نمره میان ترم او به علاوه نمره پایان ترم او کمتر از ۱۸ نباشد. اگر در این درس ۵۰ نفر ثبت نام کرده باشند، چند نفر آنها رد می‌شوند؟

حل:

$$\bar{X}_T = ۲\bar{X}_۱ + ۲\bar{X}_۲ = ۲۲$$

$$\sigma_{s.T}^{۲} = ۲^{۲}(۳^{۲}) + ۲^{۲}(۴^{۲}) = ۱۰۰ \qquad Y = ۱۸$$

$$\Rightarrow Y = ۲X_۱ + X_۲ = N(۲۲,۱۰۰)$$



$$P(Y < ۱۸) = P(Z < -۰/۴) = (۱ - P(Z < ۰/۴)) = ۰/۳۴۴۶$$

$$n = ۰/۳۴۴۶ \times ۵۰ = ۱۷/۲۳ \approx ۱۷$$

۱۷ نفر در این درس رد می‌شوند.

❐ تمرین ۳۴

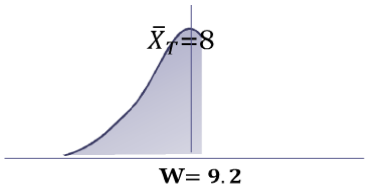
یک دستگاه برش با برش طولی و عرضی صفحات فلزی، صفحات مستطیل شکلی تولید می‌کند. برش‌های طولی و عرضی به ترتیب از توزیع نرمال مستقل با میانگین‌های مساوی ۲ و واریانس‌های ۴ و ۵ پیروی می‌کنند. احتمال اینکه محیط یک صفحه بریده شده از ۹/۲ کمتر باشد را بیابید.

حل:

$$\bar{X}_T = ۲\bar{X}_۱ + ۲\bar{X}_۲ = ۸$$

$$\sigma^{۲} = ۲^{۲}(۴^{۲}) + ۲^{۲}(۵^{۲}) = ۳۶$$

$$X \ ? \ N(۲, ۴^{۲})$$



$$Y \ ? \ N(۲,۵^۲)$$
$$W = ۲X + ۲Y \ ? \ N(۸,۳۶)$$
$$\Rightarrow P(W < ۹/۲) = P\left(Z < \frac{۹/۲ - ۸}{۶}\right) = P(Z < ۰/۲) = ۰/۵۷۹۳$$

❐ تمرین ۳۵

دو کارخانه تولید کابل A و B وجود دارد. کابل‌هایی که توسط کارخانه A تولید می‌شود، به طور متوسط تحمل ۴۰۰۰ پوند نیروی کششی و انحراف معیار ۳۰۰ پوند را دارند و کابل‌هایی که توسط کارخانه B تولید می‌شوند، به طور متوسط تحمل ۴۵۰۰ پوند نیروی کششی و انحراف معیار ۲۰۰ پوند را دارند. اگر ۱۰۰ کابل نوع A و ۵۰ کابل نوع B مورد آزمایش قرار گیرند، احتمال اینکه متوسط تحمل نیروی کششی B حداقل ۶۰۰ پوند بیش از متوسط نیروی کششی A باشد را بیابید.

حل:

$$P(\bar{X}_A < \bar{X}_B + ۶۰۰) = P(\bar{X}_A - \bar{X}_B < -۶۰۰)$$
$$\bar{x}_B - \bar{x}_A \ ? \ N\left(۴۰۰۰ - ۴۵۰۰, \frac{۳۰۰^۲}{۱۰۰} + \frac{۲۰۰^۲}{۵۰}\right)$$
$$\bar{x}_B - \bar{x}_A \ ? \ N\left(-۵۰۰, ۱۷۰۰\right)$$
$$= P\left(\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^۲}{n_A} + \frac{\sigma_B^۲}{n_B}}} < \frac{-۶۰۰ + ۵۰۰}{\sqrt{۱۷۰۰}}\right) = P(Z < -۲/۴۳) = ۰/۰۰۷۵$$
$$\Rightarrow P(\bar{X}_B - \bar{X}_A + ۶۰۰) = ۰/۰۰۷۵$$

❐ تمرین ۳۶

طول یک قطعه در ۵ بار اندازه‌گیری به صورت زیر تعیین شده است.

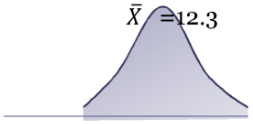
۱۲/۲,۱۲/۴,۱۲/۳,۱۲/۵,۱۲/۱

الف) محدوده‌ای را تعیین کنید که به احتمال ۹۵٪ اطلاعات فوق را پوشش دهد.

ب) مقدار طول متوسط قطعه را با احتمال اعتبار ۶۸/۳٪ و ۹۵٪ گزارش کنید.

حل:

الف)



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{۵} \rightarrow \bar{x} = ۱۲/۳ \text{in}$$

$$\sigma_s^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{۵-۱} \rightarrow \sigma_s = ۰/۱۵۸ \text{in}$$

$$x_i = \bar{x} \pm z_i \sigma_s \quad , \quad A_۲ = ۰/۹۵ \xrightarrow{\text{table}} z_i = ۱/۹۶$$

$$\Rightarrow x_i = ۱۲/۳ \pm (۱/۹۶)(۰/۱۵۸) = ۱۲/۳ \pm ۰/۳۱۰$$

ب)

$$\bar{x} \pm z_i \sigma_m \quad , \quad \sigma_m = \frac{\sigma_s}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma_m = \frac{۰/۱۵۸}{\sqrt{۵}} = ۰/۰۷۱ \text{ in}$$

$$\text{if} \quad A_۲ = ۰/۶۸۳ \rightarrow z_i = ۱ \qquad \Rightarrow ۱۲/۳ \pm ۰/۰۷۱$$

$$\text{f} \quad A_۲ = ۰/۹۵ \rightarrow z_i = ۱/۹۶ \quad \Rightarrow ۱۲/۳ \pm ۰/۱۳۹$$

❐ تمرین ۳۷

مقادیر a و b به صورت زیر اندازه‌گیری شده‌اند:

$$a = ۱۲/۲, ۱۲/۳, ۱۲/۲, ۱۲/۴, ۱۲/۱$$

$$b = ۸/۸, ۸/۵, ۸/۳$$

مطلوبست مقدار متوسط و خطای توابع زیر:

الف) $f = ۲a + b$

ب) $f = \frac{a}{b}$

پ) $f = a^۲ b$

ت) $f = ab$

حل:

الف)

$$\bar{a} = \frac{\sum a_i}{n} = ۱۲/۲۴ \quad , \quad \sigma_{sa}{}^۲ = \frac{\sum (a - \bar{a})^۲}{n-۱} = (۰/۱۱)^۲$$

$$\sigma_{ma}^{۲} = \frac{\sum \sigma_{sa}}{\sqrt{n}} = ۰/۰۵۵$$

$$\bar{b} = \frac{\sum b_i}{n} = ۸/۵۳ \quad , \quad \sigma_{sb}^{۲} = \frac{\sum (b-\bar{b})^{۲}}{n-۱} = (۰/۲۵)^{۲} \quad ,$$

$$\sigma_{mb}^{۲} = \frac{\sum \sigma_{sb}}{\sqrt{n}} = ۰/۱۴$$

$$\bar{f} = ۲\bar{a} + \bar{b} \rightarrow \bar{f} = ۳۳/۰۱$$

$$\sigma_{mf}^{۲} = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^{۲} \sigma_{ma}^{۲} + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right) \sigma_{mb}^{۲}$$

$$\sigma_{mf}^{۲} = (۲^{۲})(۰/۰۵۵)^{۲} + (۱)^{۲}(۰/۱۴)^{۲} = (۰/۳۹)^{۲}$$

$$\bar{f} \pm z_i \sigma_{mf} = ۳۳/۰۱ \pm z_i (۰/۳۹)$$

ب)

$$۱/۴۳ \pm z_i (۰/۰۲۴)$$

پ)

$$۱۲۷۷/۹۴ \pm z_i (۲۳/۹۱)$$

ت)

$$۱۰۴/۴۱ \pm z_i (۱/۷۸)$$

❐ تمرین ۳۸

اگر $b = ۸ \pm ۰/۵$ و $c = ۱۲ \pm ۰/۳$ باشد، مقدار $a = ۲b^{۲} + c^{۲}$ را محاسبه نمایید.

حل:

$$\Delta a = ۴b(\Delta b) + ۲c(\Delta c) = (۴)(۸)(۰/۵) + (۲)(۱۲)(۰/۳)$$

$$\Rightarrow a = ۲۷۲ \pm ۲۳/۲$$

❐ تمرین ۳۹

اگـر $a = ۵/۲ \pm ۰/۰۵$ ، $b = ۳/۴ \pm ۰/۰۵$ و $y = ۳۵' \pm ۱۰'$ باشـد، مقـدار $A = \frac{۱}{۲} ab \sin y$ را محاسبه نمایید.

حل:

$$a = ۵/۲, \Delta a = ۰/۰۵$$
$$b = ۳/۴, \Delta b = ۰/۰۵$$
$$y = ۳۵' = (\frac{۳۵}{۶۰})(\frac{\pi}{۱۸۰}), \Delta y = ۱۰' = \left(\frac{۱۰}{۶۰} \times \frac{\pi}{۱۸۰}\right)$$

❐ تمرین ۴۰

$$A = \frac{۱}{۲}(۵/۲)(۳/۴)\sin(۳۵) = ۵/۰۷$$

$$\Delta A = \frac{۱}{۲} b \Delta a \sin y + \frac{۱}{۲} a \Delta b \sin y + \frac{۱}{۲} ab \Delta y \cos y$$

$$= \frac{۱}{۲}(۳/۴)(۰/۰۵)\sin(۳۵) + \frac{۱}{۲}(۵/۲)(۰/۰۵)\sin(۳۵)$$

$$+ \frac{۱}{۲}(۵/۲)(۳/۴)\left(\frac{۱۰}{۶۰} \times \frac{\pi}{۱۸۰}\right)\cos(۳۵) = ۰/۱۴۴$$

$$A = ۵/۰۷ \pm ۰/۱۴۴$$

❐ تمرین ۴۱

اگر بخواهیم خطای اندازه‌گیری مساحت یک مستطیل کمتر از ۱٪ باشد، اندازه‌گیری ابعاد آن باید با چه دقتی انجام شود؟

حل:

چون خطای داده نسبی است، باید بر پارامتر تقسیم شود.

$$S = ab$$

$$\Delta S = b|\Delta a| + a|\Delta b| \rightarrow \left|\frac{\Delta S}{S}\right| = \left|\frac{b\Delta a}{ab}\right| + \left|\frac{a\Delta b}{ab}\right| = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| < ۰/۰۱$$

$$\text{if } \left|\frac{\Delta a}{a}\right| = \left|\frac{\Delta b}{b}\right| \Rightarrow ۲\left|\frac{\Delta a}{a}\right| < ۰/۰۱ \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{\Delta a}{a}\right| < ۰/۰۰۵ \\ \left|\frac{\Delta b}{b}\right| < ۰/۰۰۵ \end{cases}$$

❐ تمرین ۴۲

اگر بخواهیم خطای اندازه‌گیری چگالی یک کره کمتر از ۱٪ باشد، پارامترهای مربوطه باید با چه دقتی اندازه‌گیری شود؟

حل: باید مانند مثال قبل

$$\frac{\Delta p}{p} = ?$$

خطای نسبی را بیابیم.

$$p = \frac{m}{v} = \frac{m}{\frac{۴}{۳}\pi r^۳}$$

$$d p = \frac{\left[\frac{۴}{۳}\pi r^۳\, dm - md\left(\frac{۴}{۳}\pi r^۳\right)\right]}{\left(\frac{۴}{۳}\pi r^۳\right)}$$

$$= \frac{\frac{۴}{۳}\pi r^۳\, dm - m\pi r^۳\, d\left(\frac{۴}{۳}\right) - m\frac{۴}{۳}r^۳ d(\pi) - ۴ m r^۲ \pi d r}{\left(\frac{۴}{۳}\pi r^۳\right)^۲}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dm}{m} - \frac{d(\frac{۴}{۳})}{\frac{۴}{۳}} - \frac{d(\pi)}{\pi} - \frac{۳dr}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{p} = \left|\frac{\Delta(\frac{۴}{۳})}{\frac{۴}{۳}}\right| + \left|\frac{\Delta(\pi)}{\pi}\right| + \left|\frac{۳\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta m}{m}\right|$$

$$\begin{cases} \pi = ۳/۱۴۱۵۹۲ \\ \pi = ۳/۱۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta\pi}{\pi} = ۰/۰۰۰۵$$

❐ تمرین ۴۳

$$\begin{cases}\frac{۴}{۳}=۱/۳۳۳۳\\ \frac{۴}{۳}=۱/۳۳\end{cases}\Rightarrow\frac{\Delta(\frac{۴}{۳})}{\frac{۴}{۳}}=۰/۰۰۲۵$$

$$۰/۰۰۲۵+۰/۰۰۰۵+۳\left|\frac{\Delta r}{r}\right|+\left|\frac{\Delta m}{m}\right|<۰/۰۰۷$$

$$\text{if }\left|\frac{\Delta r}{r}\right|=\left|\frac{\Delta m}{m}\right|\Rightarrow ۴\left|\frac{\Delta r}{r}\right|<۰/۰۰۷\Rightarrow\left|\frac{\Delta r}{r}\right|<۰/۰۰۱۷۵$$

$$\begin{cases}\max\left(\frac{\Delta m}{m}\right)=۰/۰۰۱۷۵=۰/۱۷۵\%\\ \max\left(\frac{\Delta r}{r}\right)=۰/۰۰۱۷۵=۰/۱۷۵\%\end{cases}$$

❐ تمرین ۴۴

اگر $x+۲y=a$ و $۲x+y=b$ باشد و $\begin{cases}a:۳/۷۳,\ ۳/۷۲,\ ۳/۷۳,\ ۳/۷۴\\ b:۵/۲۱,\ ۵/۲۰,\ ۵/۲۱,\ ۵/۲۳,\ ۵/۲۰\end{cases}$

مقادیر x و y را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{cases}\bar{a}=۳/۷۳\\ \bar{b}=۵/۲۱\end{cases},\quad\begin{cases}\bar{x}+۲\bar{y}=\bar{a}\\ ۲\bar{x}+\bar{y}=\bar{b}\end{cases},$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\bar{x}=-\frac{۱}{۳}\bar{a}+\frac{۲}{۳}\bar{b}\\ \bar{y}=\frac{۲}{۳}\bar{a}-\frac{۱}{۳}\bar{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\bar{x}=۲/۲۳\\ \bar{y}=۰/۷۵\end{cases}$$

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum (a_i - \bar{a})^2 + \sum (b_i - \bar{b})^2}{[(5+4)-1]-1}} = 0/010$$

$$\begin{cases} \sigma_{m_a} = \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{n}} = \dfrac{0/01}{\sqrt{4}} = 0/005 \\ \sigma_{m_b} = \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{m}} = \dfrac{0/01}{\sqrt{5}} = 0/004 \end{cases}$$

روش مشتق‌گیری

$$d\bar{x} = \frac{1}{3} d\bar{a} + \frac{2}{3} d\bar{b}$$

$$d\bar{y} = \frac{2}{3} d\bar{a} - \frac{1}{3} d\bar{b}$$

روش پخش خطا

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{a}}\right)^2 \sigma_{m_a}^2 + \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{b}}\right)^2 \sigma_{m_b}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \sigma_{m_a}^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sigma_{m_b}^2} = 0/003$$

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{a}}\right)^2 \sigma_{m_a}^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{b}}\right)^2 \sigma_{m_b}^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \sigma_{m_a}^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sigma_{m_b}^2} = 0/003$$

$$\Rightarrow x = 2/23 \pm 0/003 \qquad , y = 0/75 \pm 0/003$$

❐ تمرین ۴۵

۵ اندازه‌گیری با کولیس و ۳ اندازه‌گیری با میکرومتر ثبت شده است. اگر وزن داده‌های ثبت شده با کولیس ۱ و وزن داده‌های میکرومتر ۵ باشد، مقدار پارامتر اندازه‌گیری شده را تعیین کنید.

میکرومتر: ۱۲/۳۴, ۱۲/۳۲, ۱۲/۳۷

کولیس: ۱۲/۳۵, ۱۲/۳۰, ۱۲/۲۵, ۱۲/۴۰, ۱۲/۳۵

حل:

$$\bar{l} = \frac{\sum p_i l_i}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i l_i}{1+1+1+1+1+5+5+5} = 12/34$$

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum\left[p_i(l_i - \bar{l})^2\right]}{8-1}} = ۰/۰۵۳۵$$

$$\sigma_{s_p} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{p_i}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{s_{p=1}} = \frac{۰/۰۵۳۵}{\sqrt{1}} = ۰/۰۵۳۵ \\ \sigma_{s_{p=5}} = \frac{۰/۰۵۳۵}{\sqrt{5}} = ۰/۰۲۳ \end{cases}$$

❐ تمرین ۴۶

حل:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_s}{\sqrt{\sum p_i}} \rightarrow \sigma_m = \frac{۰/۰۵۳۵}{\sqrt{۲۰}} = ۰/۰۱۲$$

$$l = l \pm z_i \sigma_m, \quad z_i = 1$$

$$\Rightarrow l = ۱۲/۳۴ \pm ۰/۰۱۲$$

❐ تمرین ۴۷

جدول زیر مقادیر صادرات فولاد ژاپن را در یک دوره زمانی نشان می‌دهد. معادله کمترین مربعات را به صورت $y_c = a + bx + cx^2$ به دست آورید.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
y	۱۱/۷	۱۳/۱	۱۴/۵	۱۵/۴	۱۸/۴	۲۰	۲۱/۸	۲۳/۹
x	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
y	۲۸/۳	۳۱/۷	۳۷/۱	۴۵/۳	۳۹/۲	۶۰/۶	۷۶/۳	۸۹/۶

x	y	x^2	xy	x^3	x^4	x^2y
۰	۱۱/۷	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱۳/۱	۱	۱۳/۱	۱	۱	۱۳/۱
۲	۱۴/۵	۴	۲۹	۸	۱۶	۵۸
۳	۱۵/۴	۹	۴۶/۲	۲۷	۸۱	۱۳۸/۶
۴	۱۸/۴	۱۶	۷۳/۶	۶۴	۲۵۶	۲۹۴/۴
۵	۲۰	۲۵	۱۰۰	۱۲۵	۶۲۵	۵۰۰
۶	۲۱/۸	۳۶	۱۳۰/۸	۲۱۶	۱۲۹۶	۷۸۴/۸
۷	۲۲/۹	۴۹	۱۶۷/۳	۳۴۳	۲۴۰۱	۱۱۷۱/۱
۸	۲۸/۳	۶۴	۲۲۶/۴	۵۱۲	۴۰۹۶	۱۸۱۱/۲
۹	۳۱/۷	۸۱	۲۸۵/۳	۷۲۹	۶۵۶۱	۲۵۶۷/۷
۱۰	۳۷/۱	۱۰۰	۳۷۱	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۳۷۱۰
۱۱	۴۵/۳	۱۲۱	۴۹۸/۳	۱۳۳۱	۱۴۶۴۱	۵۴۸۱/۳
۱۲	۳۹/۲	۱۴۴	۴۷۰/۴	۱۷۲۸	۲۰۷۳۶	۵۶۴۴/۸
۱۳	۶۰/۶	۱۶۹	۷۸۷/۸	۲۱۹۷	۲۸۵۶۱	۱۰۲۴۱/۴
۱۴	۷۶/۳	۱۹۶	۱۰۶۸/۲	۲۷۴۴	۳۸۴۱۶	۱۴۹۵۴/۸
۱۵	۸۹/۶	۲۲۵	۱۳۴۴	۳۳۷۵	۵۰۶۲۵	۲۰۱۶۰
۱۲۰	۵۴۶/۹	۱۲۴۰	۵۶۱۱/۴	۱۴۴۰۰	۱۷۸۳۱۲	۶۷۵۳۱/۲

حل:

$$\bar{x} = ۷/۵$$

$$\bar{y} = ۳۴/۱۸$$

$$\begin{cases} \sum y = na + \sum xb + \sum x^2 c \\ \sum xy = \sum xa + \sum x^2 b + \sum x^3 c \\ \sum x^2 y = \sum x^2 a + \sum x^3 b + \sum x^4 c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵۴۶/۹ = ۱۶a + ۱۲۰b + ۱۲۴۰c \\ ۵۶۱۱/۴ = ۱۲۰a + ۱۲۴۰b + ۱۴۴۰۰c \\ ۶۷۵۳۱/۲ = ۱۲۴۰a + ۱۴۴۰۰b + ۱۷۸۳۱۲c \end{cases}$$

$$a = ۱۲/۲۱, \quad b = ۲/۱۳, \quad c = ۰/۴۳۷$$

$$\Rightarrow y = ۱۶/۲۱ - ۲/۱۳x + ۰/۴۳۷x^2$$

❐ تمرین ۴۸

اگر رابطه D با V به صورت $D = V^n + k$ باشد و این دو پارامتر به صورت زیر اندازه‌گیری شده باشند، مقدار n را در شرایطی به دست آورید که وقتی V بسیار کوچک است، مقدار D برابر ۲ باشد.

D:	۳	۶	۱۱	۱۸	۲۷
V:	۱	۲	۳	۴	۵

حل:

$$D = ۲,\ D = k \Rightarrow k = ۲$$

$$\rightarrow D = ۲ + V^n$$

$$\log(D - ۲) = n \log V$$

$$y = a + bx,\ y = \log(D - ۲), x = \log V$$

$$y = nx \rightarrow \begin{cases} a = ۰ \\ b = n \end{cases}$$

D:	۳	۶	۱۱	۱۸	۲۷
V:	۱	۲	۳	۴	۵

Y	$\log ۱$	$\log ۴$	$\log ۹$	$\log ۱۶$	$\log ۲۵$
x	$\log ۱$	$\log ۲$	$\log ۳$	$\log ۴$	$\log ۵$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} \rightarrow b\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = ۲ \Rightarrow b = n = ۲ \Rightarrow D = ۲ + V^{۲}$$

پیوست

جدول E: تبدیل r به Z_r

r	z	r	z	r	z	r	z	r	z
.000	.000	.200	.203	.400	.424	.600	.693	.800	1.099
.005	.005	.205	.208	.405	.430	.605	.701	.805	1.113
.010	.010	.210	.213	.410	.436	.610	.709	.810	1.127
.015	.015	.215	.218	.415	.442	.615	.717	.815	1.142
.020	.020	.220	.224	.420	.448	.620	.725	.820	1.157
.025	.025	.225	.229	.425	.454	.625	.733	.825	1.172
.030	.030	.230	.234	.430	.460	.630	.741	.830	1.188
.035	.035	.235	.239	.435	.466	.635	.750	.835	1.204
.040	.040	.240	.245	.440	.472	.640	.758	.840	1.221
.045	.045	.245	.250	.445	.478	.645	.767	.845	1.238
.050	.050	.250	.255	.450	.485	.650	.775	.850	1.256
.055	.055	.255	.261	.455	.491	.655	.784	.855	1.274
.060	.060	.260	.266	.460	.497	.660	.793	.860	1.293
.065	.065	.265	.271	.465	.504	.665	.802	.865	1.313
.070	.070	.270	.277	.470	.510	.670	.811	.870	1.333
.075	.075	.275	.282	.475	.517	.675	.820	.875	1.354
.080	.080	.280	.288	.480	.523	.680	.829	.880	1.376
.085	.085	.285	.293	.485	.530	.685	.838	.885	1.398
.090	.090	.290	.299	.490	.536	.690	.848	.890	1.422
.095	.095	.295	.304	.495	.543	.695	.858	.895	1.447
.100	.100	.300	.310	.500	.549	.700	.867	.900	1.472
.105	.105	.305	.315	.505	.556	.705	.877	.905	1.499
.110	.110	.310	.321	.510	.563	.710	.887	.910	1.528
.115	.116	.315	.326	.515	.570	.715	.897	.915	1.557
.120	.121	.320	.332	.520	.576	.720	.908	.920	1.589
.125	.126	.325	.337	.525	.583	.725	.918	.925	1.623
.130	.131	.330	.343	.530	.590	.730	.929	.930	1.658
.135	.136	.335	.348	.535	.597	.735	.940	.935	1.697
.140	.141	.340	.354	.540	.604	.740	.950	.940	1.738
.145	.146	.345	.360	.545	.611	.745	.962	.945	1.783
.150	.151	.350	.365	.550	.618	.750	.973	.950	1.832
.155	.156	.355	.371	.555	.626	.755	.984	.955	1.886
.160	.161	.360	.377	.560	.633	.760	.996	.960	1.946
.165	.167	.365	.383	.565	.640	.765	1.008	.965	2.014
.170	.172	.370	.388	.570	.648	.770	1.020	.970	2.092
.175	.177	.375	.394	.575	.655	.775	1.033	.975	2.185
.180	.182	.380	.400	.580	.662	.780	1.045	.980	2.298
.185	.187	.385	.406	.585	.670	.785	1.058	.985	2.443
.190	.192	.390	.412	.590	.678	.790	1.071	.990	2.647
.195	.198	.395	.418	.595	.685	.795	1.085	.995	2.994

جدول F : توزیع F
۵٪ (ارقام کمرنگ) ۱٪ (ارقام پررنگ)

درجات آزادی مخرج	درجات آزادی صورت																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	241	252	253	253	254	254	254
	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6082	6106	6142	6169	6208	6234	6258	6286	6302	6323	6334	6352	6361	6366
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	19.50
	98.49	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.34	99.36	99.38	99.40	99.41	99.42	99.43	99.44	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.49	99.49	99.50	99.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.56	8.54	8.54	8.53
	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.92	26.83	26.69	26.60	26.50	26.41	26.35	26.27	26.23	26.18	26.14	26.12
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74	5.71	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63
	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.54	14.45	14.37	14.24	14.15	14.02	13.93	13.83	13.74	13.69	13.61	13.57	13.52	13.48	13.46
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.40	4.38	4.37	4.36
	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.45	10.27	10.15	10.05	9.96	9.89	9.77	9.68	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.17	9.13	9.07	9.04	9.02
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67
	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.60	7.52	7.39	7.31	7.23	7.14	7.09	7.02	6.99	6.94	6.90	6.88
7	5.59	4.47	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.28	3.25	3.24	3.23
	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62	6.54	6.47	6.35	6.27	6.15	6.07	5.98	5.90	5.85	5.78	5.75	5.70	5.67	5.65
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.94	2.93
	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.74	5.67	5.56	5.48	5.36	5.28	5.20	5.11	5.06	5.00	4.96	4.91	4.88	4.86
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71
	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.00	4.92	4.80	4.73	4.64	4.56	4.51	4.45	4.41	4.36	4.33	4.31
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.54
	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.78	4.71	4.60	4.52	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.05	4.01	3.96	3.93	3.91
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2.45	2.42	2.41	2.40
	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.88	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.29	4.21	4.10	4.02	3.94	3.86	3.80	3.74	3.70	3.66	3.62	3.60
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72	2.69	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30
	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.65	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.05	3.98	3.86	3.78	3.70	3.61	3.56	3.49	3.46	3.41	3.38	3.36
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.32	2.28	2.26	2.24	2.22	2.21
	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.85	3.78	3.67	3.59	3.51	3.42	3.37	3.30	3.27	3.21	3.18	3.16
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.21	2.19	2.16	2.14	2.13
	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.70	3.62	3.51	3.43	3.34	3.26	3.21	3.14	3.11	3.06	3.02	3.00
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	2.55	2.51	2.48	2.43	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2.18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.07
	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.56	3.48	3.36	3.29	3.20	3.12	3.07	3.00	2.97	2.92	2.89	2.87
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42	2.37	2.33	2.28	2.24	2.20	2.16	2.13	2.09	2.07	2.04	2.02	2.01
	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.61	3.55	3.45	3.37	3.25	3.18	3.10	3.01	2.96	2.89	2.86	2.80	2.77	2.75
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41	2.38	2.33	2.29	2.23	2.19	2.15	2.11	2.08	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96
	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.45	3.35	3.27	3.16	3.08	3.00	2.92	2.86	2.79	2.76	2.70	2.67	2.65

18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.29	2.25	2.19	2.15	2.11	2.07	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92
	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.44	3.37	3.27	3.19	3.07	3.00	2.91	2.85	2.78	2.73	2.68	2.62	2.59	2.57
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.55	2.49	2.43	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21	2.15	2.11	2.07	2.02	2.00	1.96	1.94	1.91	1.90	1.88
	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.19	3.12	3.00	2.92	2.84	2.76	2.70	2.63	2.60	2.56	2.51	2.49
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31	2.28	2.23	2.18	2.12	2.06	2.04	1.99	1.96	1.92	1.90	1.87	1.85	1.84
	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.71	3.56	3.45	3.37	3.30	3.23	3.13	3.05	2.94	2.86	2.77	2.69	2.63	2.56	2.53	2.47	2.44	2.42
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.20	2.15	2.09	2.05	2.00	1.96	1.93	1.89	1.87	1.84	1.82	1.81
	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.65	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.07	2.99	2.88	2.80	2.72	2.63	2.58	2.51	2.47	2.43	2.38	2.36
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.47	2.40	2.35	2.30	2.26	2.23	2.18	2.13	2.07	2.03	1.98	1.93	1.91	1.87	1.84	1.81	1.80	1.78
	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.02	2.94	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.46	2.42	2.37	2.33	2.31
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.45	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.14	2.10	2.04	2.00	1.96	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76
	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	2.97	2.89	2.78	2.70	2.62	2.53	2.48	2.41	2.37	2.32	2.28	2.26
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.43	2.36	2.30	2.26	2.22	2.18	2.13	2.09	2.02	1.98	1.94	1.89	1.86	1.82	1.80	1.76	1.74	1.73
	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.25	3.17	3.09	3.03	2.93	2.85	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.36	2.33	2.27	2.23	2.21
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.11	2.06	2.00	1.96	1.92	1.87	1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.71
	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.21	3.13	3.05	2.99	2.89	2.81	2.70	2.62	2.54	2.45	2.42	2.32	2.29	2.23	2.19	2.17
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.10	2.05	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.78	1.76	1.73	1.72	1.69
	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.17	3.09	3.02	2.96	2.86	2.77	2.66	2.58	2.50	2.41	2.36	2.28	2.25	2.19	2.15	2.13
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.30	2.25	2.20	2.16	2.13	2.08	2.03	1.97	1.93	1.88	1.84	1.80	1.76	1.74	1.71	1.68	1.67
	7.68	5.49	4.60	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.14	3.06	2.98	2.93	2.83	2.74	2.63	2.55	2.47	2.38	2.33	2.25	2.21	2.16	2.12	2.10
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.06	2.02	1.96	1.91	1.87	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	1.65
	7.64	5.45	4.57	4.07	3.76	3.53	3.36	3.23	3.11	3.03	2.95	2.90	2.80	2.71	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.22	2.18	2.13	2.09	2.06
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.05	2.00	1.94	1.90	1.85	1.80	1.77	1.73	1.71	1.68	1.65	1.64
	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.08	3.00	2.92	2.87	2.77	2.68	2.57	2.49	2.41	2.32	2.27	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.04	1.99	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.62
	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.06	2.98	2.90	2.84	2.74	2.66	2.55	2.47	2.38	2.29	2.24	2.16	2.13	2.07	2.03	2.01
32	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.32	2.25	2.19	2.14	2.10	2.07	2.02	1.97	1.91	1.86	1.82	1.76	1.74	1.69	1.67	1.64	1.61	1.59
	7.50	5.34	4.46	3.97	3.66	3.42	3.25	3.12	3.01	2.94	2.86	2.80	2.70	2.62	2.51	2.42	2.34	2.25	2.20	2.12	2.08	2.02	1.98	1.96
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.30	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	2.00	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.57
	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.38	3.21	3.08	2.97	2.89	2.82	2.76	2.66	2.58	2.47	2.38	2.30	2.21	2.15	2.08	2.04	1.98	1.94	1.91
36	4.11	3.26	2.86	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.10	2.06	2.03	1.98	1.93	1.87	1.82	1.78	1.72	1.69	1.65	1.62	1.59	1.56	1.55
	7.39	5.25	4.38	3.89	3.58	3.35	3.18	3.04	2.94	2.86	2.78	2.72	2.62	2.54	2.43	2.35	2.26	2.17	2.12	2.04	2.00	1.94	1.90	1.87
38	4.10	3.25	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02	1.96	1.92	1.85	1.80	1.76	1.71	1.67	1.63	1.60	1.57	1.54	1.53
	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.91	2.82	2.75	2.69	2.59	2.51	2.40	2.32	2.22	2.14	2.08	2.00	1.97	1.90	1.86	1.84
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.04	2.00	1.95	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51
	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.88	2.80	2.73	2.66	2.56	2.49	2.37	2.29	2.20	2.11	2.05	1.97	1.94	1.88	1.84	1.81
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.33	2.24	2.17	2.11	2.06	2.02	1.99	1.94	1.89	1.82	1.78	1.73	1.68	1.64	1.60	1.57	1.54	1.51	1.49
	7.27	5.15	4.29	3.80	3.49	3.26	3.10	2.96	2.86	2.77	2.70	2.64	2.54	2.46	2.35	2.26	2.17	2.08	2.02	1.94	1.91	1.85	1.80	1.78
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.45	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	2.01	1.98	1.92	1.88	1.81	1.76	1.72	1.66	1.63	1.58	1.56	1.52	1.50	1.48
	7.24	5.12	4.26	3.78	3.46	3.24	3.07	2.94	2.84	2.75	2.68	2.63	2.53	2.44	2.33	2.24	2.15	2.06	2.00	1.92	1.88	1.82	1.78	1.75
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.14	2.09	2.04	2.00	1.97	1.91	1.87	1.80	1.75	1.71	1.65	1.62	1.57	1.54	1.51	1.48	1.46
	7.21	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.05	2.92	2.82	2.73	2.66	2.60	2.50	2.42	2.30	2.22	2.13	2.04	1.98	1.90	1.86	1.80	1.76	1.72
48	4.04	3.19	2.80	2.56	2.41	2.30	2.21	2.14	2.08	2.03	1.99	1.96	1.90	1.86	1.79	1.74	1.70	1.64	1.61	1.56	1.53	1.50	1.47	1.45
	7.19	5.08	4.22	3.74	3.42	3.20	3.04	2.90	2.80	2.71	2.64	2.58	2.48	2.40	2.28	2.20	2.11	2.02	1.96	1.88	1.84	1.78	1.73	1.70

جدول G: توزیع خی‌دو

درجات آزادی	سطوح معناداری 0.05	0.01
1	3.84	6.63
2	5.99	9.21
3	7.81	11.34
4	9.49	13.28
5	11.07	15.09
6	12.59	16.81
7	14.07	18.48
8	15.51	20.09
9	16.92	21.67
10	18.31	23.21
11	19.68	24.72
12	21.03	26.22
13	22.36	27.69
14	23.68	29.14
15	25.00	30.58
16	26.30	32.00
17	27.59	33.41
18	28.87	34.81
19	30.14	36.19
20	31.41	37.57
21	32.67	38.93
22	33.92	40.29
23	35.17	41.64
24	36.42	42.98
25	37.65	44.31
26	38.89	45.64
27	40.11	46.96
28	41.34	48.28
29	42.56	49.59
30	43.77	50.89
40	55.76	63.69
50	67.50	76.15
60	79.08	88.38
70	90.53	100.43
80	101.88	112.33
90	113.15	124.12
100	124.34	135.81

جدول II: اعداد تصادفی

	Column									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Row										
1	32388	52390	16815	69298	82732	38480	73817	32523	41961	44437
2	05300	22164	24369	54224	35983	19687	11052	91491	60383	19746
3	66523	44133	00697	35552	35970	19124	63318	29686	03387	59846
4	44167	64486	64758	75366	76554	31601	12614	33072	60332	92325
5	47914	02584	37680	20801	72152	39339	34806	08930	85001	87820
6	63445	17361	62825	39908	05607	91284	68833	25570	38818	46920
7	89917	15665	52872	73823	73144	88662	88970	74492	51805	99378
8	92648	45454	09552	88815	16553	51125	79375	97596	16296	66092
9	20979	04508	64535	31355	86064	29472	47689	05974	52468	16834
10	81959	65642	74240	56302	00033	67107	77510	70625	28725	34191

جدول I: ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن

N	سطوح معناداری	
	0.05	0.01
4	1.000	
5	0.900	1.000
6	0.829	0.943
7	0.714	0.893
8	0.643	0.833
9	0.600	0.783
10	0.564	0.746
12	0.506	0.712
14	0.456	0.645
16	0.425	0.601
18	0.399	0.564
20	0.377	0.534
22	0.359	0.508
24	0.343	0.485
26	0.329	0.465
28	0.317	0.448
30	0.306	0.432

جدول ز: آزمون توکی نقاط درصدی q در: p = ۰/۰۵

تعداد میانگینهای مورد مقایسه = r درجات آزادی مخرج آزمون F = df_w

df_w \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07
2	6.08	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47

ادامهٔ جدول ز: P = ۰/۰۵

df_w \ r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83	59.56
2	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57	16.77
3	9.72	9.95	10.15	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.11	11.24
4	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33
12	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11
14	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96
16	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
24	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59
30	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
60	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

ادامهٔ جدول ژ: P = ۰/۰۱

d.f. ν \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69
3	8.26	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27
5	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37
8	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21
11	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99
12	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54
15	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44
16	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09
24	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60
60	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16

ادامهٔ جدول ژ: P = ۰/۰۱

d.f. ν \ r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3	298.0
2	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50	37.95
3	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55	19.77
4	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24	14.40
5	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93
6	9.30	9.48	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54
7	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.33	8.41	8.49	8.57
10	7.36	7.49	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23
11	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55
14	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.13	7.20	7.27	7.33	7.39
15	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.81	6.87	6.94	7.00	7.05
18	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.73	6.79	6.85	6.91	6.97
19	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	6.19	6.28	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82
24	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	5.69	5.76	5.83	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21
60	5.53	5.60	5.67	5.73	5.78	5.84	5.89	5.93	5.97	6.01
120	5.37	5.44	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

جدول K: نقاط درصدی دامنهٔ استیودنت‌شده

df خطا	α	تعداد میانگین‌ها در فاصل درمیانگین‌مورد مطالعه دام									
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	.05	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17
	.01	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48
6	.05	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65
	.01	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30
7	.05	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30
	.01	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55
8	.05	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.03
	.01	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03
9	.05	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87
	.01	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65
10	.05	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72
	.01	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36
11	.05	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61
	.01	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13
12	.05	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51
	.01	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94
13	.05	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43
	.01	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79
14	.05	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36
	.01	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66
15	.05	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31
	.01	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55
16	.05	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26
	.01	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46
17	.05	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21
	.01	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38
18	.05	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17
	.01	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31
19	.05	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14
	.01	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25
20	.05	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11
	.01	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19
24	.05	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01
	.01	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02
30	.05	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92
	.01	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85
40	.05	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82
	.01	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69
60	.05	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73
	.01	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53
120	.05	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64
	.01	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.37
∞	.05	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55
	.01	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23

جدول A

دامنه‌های استیودنت‌شده معنی‌دار، برای آزمون چند دامنه‌ای دوتکی با $\alpha = 0/05$*

df \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	6.085																	
3	4.501	4.516																
4	3.927	4.013	4.033															
5	3.635	3.749	3.797	3.814														
6	3.461	3.587	3.649	3.680	3.694													
7	3.344	3.477	3.548	3.588	3.611	3.622												
8	3.261	3.399	3.475	3.521	3.549	3.566	3.575											
9	3.199	3.339	3.420	3.470	3.502	3.523	3.536	3.544										
10	3.151	3.293	3.376	3.430	3.465	3.489	3.505	3.516	3.522									
11	3.113	3.256	3.342	3.397	3.435	3.462	3.480	3.493	3.501	3.506								
12	3.082	3.225	3.313	3.370	3.410	3.439	3.459	3.474	3.484	3.491	3.496							
13	3.055	3.200	3.289	3.348	3.389	3.419	3.442	3.458	3.470	3.478	3.484	3.488						
14	3.033	3.178	3.268	3.329	3.372	3.403	3.426	3.444	3.457	3.467	3.474	3.479	3.482					
15	3.014	3.160	3.250	3.312	3.356	3.389	3.413	3.432	3.446	3.457	3.465	3.471	3.476	3.478				
16	2.998	3.144	3.235	3.288	3.343	3.376	3.402	3.422	3.437	3.449	3.458	3.465	3.470	3.473	3.477			
17	2.984	3.130	3.222	3.285	3.331	3.366	3.392	3.412	3.429	3.441	3.451	3.459	3.465	3.469	3.473	3.475		
18	2.971	3.118	3.210	3.274	3.321	3.356	3.383	3.405	3.421	3.435	3.445	3.454	3.460	3.465	3.470	3.472	3.474	
19	2.960	3.107	3.199	3.264	3.311	3.347	3.375	3.397	3.415	3.429	3.440	3.449	3.456	3.462	3.467	3.470	3.472	3.473
20	2.950	3.097	3.190	3.255	3.303	3.339	3.368	3.391	3.409	3.424	3.436	3.445	3.453	3.459	3.464	3.467	3.470	3.472
24	2.919	3.066	3.160	3.226	3.276	3.315	3.345	3.370	3.390	3.406	3.420	3.432	3.441	3.449	3.456	3.461	3.465	3.469
30	2.888	3.035	3.131	3.199	3.250	3.290	3.322	3.349	3.371	3.389	3.405	3.418	3.430	3.439	3.447	3.454	3.460	3.466
40	2.858	3.006	3.102	3.171	3.224	3.266	3.300	3.328	3.352	3.373	3.390	3.405	3.418	3.429	3.439	3.448	3.456	3.463
60	2.829	2.976	3.073	3.143	3.198	3.241	3.277	3.307	3.333	3.355	3.374	3.391	3.406	3.419	3.431	3.442	3.451	3.460
120	2.800	2.947	3.045	3.116	3.172	3.217	3.254	3.287	3.314	3.337	3.359	3.377	3.394	3.409	3.423	3.435	3.446	3.457
∞	2.772	2.918	3.017	3.089	3.146	3.193	3.232	3.265	3.294	3.320	3.343	3.363	3.382	3.399	3.414	3.428	3.442	3.454

جدول A

دامنه‌های استیودنت‌شده معنی‌دار برای آزمون جدید چند دامنه‌ای دانکن با $\alpha = 0/01$

df / k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	14.04																	
3	8.261	8.321																
4	6.512	6.677	6.740															
5	5.702	5.893	5.989	6.040														
6	5.243	5.439	5.549	5.614	5.655													
7	4.949	5.145	5.260	5.334	5.383	5.416												
8	4.746	4.939	5.057	5.135	5.189	5.227	5.256											
9	4.596	4.787	4.906	4.986	5.043	5.086	5.118	5.142										
10	4.482	4.671	4.790	4.871	4.931	4.975	5.010	5.037	5.058									
11	4.392	4.579	4.697	4.780	4.841	4.887	4.924	4.952	4.975	4.994								
12	4.320	4.504	4.622	4.706	4.767	4.815	4.852	4.883	4.907	4.927	4.944							
13	4.260	4.442	4.560	4.644	4.706	4.755	4.793	4.824	4.850	4.872	4.889	4.904						
14	4.210	4.391	4.508	4.591	4.654	4.704	4.743	4.775	4.802	4.824	4.843	4.859	4.872					
15	4.168	4.347	4.463	4.547	4.610	4.660	4.700	4.733	4.760	4.783	4.803	4.820	4.834	4.846				
16	4.131	4.309	4.425	4.509	4.572	4.622	4.663	4.696	4.724	4.748	4.768	4.786	4.800	4.813	4.825			
17	4.099	4.275	4.391	4.475	4.539	4.589	4.630	4.664	4.693	4.717	4.738	4.756	4.771	4.785	4.797	4.807		
18	4.071	4.246	4.362	4.445	4.509	4.560	4.601	4.635	4.664	4.689	4.711	4.729	4.745	4.759	4.772	4.783	4.792	
19	4.046	4.220	4.333	4.419	4.483	4.534	4.575	4.610	4.639	4.665	4.686	4.705	4.722	4.736	4.749	4.761	4.771	4.780
20	4.024	4.197	4.312	4.395	4.459	4.510	4.552	4.587	4.617	4.642	4.664	4.684	4.701	4.716	4.729	4.741	4.751	4.761
24	3.956	4.126	4.239	4.322	4.386	4.437	4.480	4.516	4.546	4.573	4.596	4.616	4.634	4.651	4.665	4.678	4.690	4.700
30	3.889	4.056	4.168	4.250	4.314	4.366	4.409	4.445	4.477	4.504	4.528	4.550	4.569	4.586	4.601	4.615	4.628	4.640
40	3.825	3.986	4.098	4.180	4.244	4.296	4.339	4.376	4.408	4.436	4.461	4.483	4.503	4.521	4.537	4.553	4.566	4.579
60	3.762	3.922	4.031	4.111	4.174	4.226	4.270	4.307	4.340	4.368	4.394	4.417	4.438	4.456	4.474	4.490	4.504	4.518
120	3.702	3.858	3.965	4.044	4.107	4.158	4.202	4.239	4.272	4.301	4.327	4.351	4.372	4.392	4.410	4.426	4.442	4.456
∞	3.643	3.796	3.900	3.978	4.040	4.091	4.135	4.172	4.205	4.235	4.261	4.285	4.307	4.327	4.345	4.363	4.379	4.394

جدول B: سطح زیر منحنی نرمال

(1) z	(2) A	(3) B	(4) C	(5) y
	سطح تا میانگین	سطح بزرگتر	سطح کوچکتر	ارتفاع
0.00	.0000	.5000	.5000	.3989
0.01	.0040	.5040	.4960	.3989
0.02	.0080	.5080	.4920	.3989
0.03	.0120	.5120	.4880	.3988
0.04	.0160	.5160	.4840	.3986
0.05	.0199	.5199	.4801	.3984
0.06	.0239	.5239	.4761	.3982
0.07	.0279	.5279	.4721	.3980
0.08	.0319	.5319	.4681	.3977
0.09	.0359	.5359	.4641	.3973
0.10	.0398	.5398	.4602	.3970
0.11	.0438	.5438	.4562	.3965
0.12	.0478	.5478	.4522	.3961
0.13	.0517	.5517	.4483	.3956
0.14	.0557	.5557	.4443	.3951
0.15	.0596	.5596	.4404	.3945
0.16	.0636	.5636	.4364	.3939
0.17	.0675	.5675	.4325	.3932
0.18	.0714	.5714	.4286	.3925
0.19	.0753	.5753	.4247	.3918
0.20	.0793	.5793	.4207	.3910
0.21	.0832	.5832	.4168	.3902
0.22	.0871	.5871	.4129	.3894
0.23	.0910	.5910	.4090	.3885
0.24	.0948	.5948	.4052	.3876
0.25	.0987	.5987	.4013	.3867
0.26	.1026	.6026	.3974	.3857
0.27	.1064	.6064	.3936	.3847
0.28	.1103	.6103	.3897	.3836
0.29	.1141	.6141	.3859	.3825
0.30	.1179	.6179	.3821	.3814
0.31	.1217	.6217	.3783	.3802
0.32	.1255	.6255	.3745	.3790
0.33	.1293	.6293	.3707	.3778
0.34	.1331	.6331	.3669	.3765
0.35	.1368	.6368	.3632	.3752
0.36	.1406	.6406	.3594	.3739
0.37	.1443	.6443	.3557	.3725
0.38	.1480	.6480	.3520	.3712
0.39	.1517	.6517	.3483	.3697
0.40	.1554	.6554	.3446	.3683
0.41	.1591	.6591	.3409	.3668
0.42	.1628	.6628	.3372	.3653
0.43	.1664	.6664	.3336	.3637
0.44	.1700	.6700	.3300	.3621
0.45	.1736	.6736	.3264	.3605
0.46	.1772	.6772	.3228	.3589
0.47	.1808	.6808	.3192	.3572
0.48	.1844	.6844	.3156	.3555
0.49	.1879	.6879	.3121	.3538

ادامهٔ جدول B

(1) z	(2) A سطح تا میانگین	(3) B سطح بزرگتر	(4) C سطح کوچکتر	(5) y ارتفاع
0.50	.1915	.6915	.3085	.3521
0.51	.1950	.6950	.3050	.3503
0.52	.1985	.6985	.3015	.3485
0.53	.2019	.7019	.2981	.3467
0.54	.2054	.7054	.2946	.3448
0.55	.2088	.7088	.2912	.3429
0.56	.2123	.7123	.2877	.3410
0.57	.2157	.7157	.2843	.3391
0.58	.2190	.7190	.2810	.3372
0.59	.2224	.7224	.2776	.3352
0.60	.2257	.7257	.2743	.3332
0.61	.2291	.7291	.2709	.3312
0.62	.2324	.7324	.2676	.3292
0.63	.2357	.7357	.2643	.3271
0.64	.2389	.7389	.2611	.3251
0.65	.2422	.7422	.2578	.3230
0.66	.2454	.7454	.2546	.3209
0.67	.2486	.7486	.2514	.3187
0.68	.2517	.7517	.2483	.3166
0.69	.2549	.7549	.2451	.3144
0.70	.2580	.7580	.2420	.3123
0.71	.2611	.7611	.2389	.3101
0.72	.2642	.7642	.2358	.3079
0.73	.2673	.7673	.2327	.3056
0.74	.2704	.7704	.2296	.3034
0.75	.2734	.7734	.2266	.3011
0.76	.2764	.7764	.2236	.2989
0.77	.2794	.7794	.2206	.2966
0.78	.2823	.7823	.2177	.2943
0.79	.2852	.7852	.2148	.2920
0.80	.2881	.7881	.2119	.2897
0.81	.2910	.7910	.2090	.2874
0.82	.2939	.7939	.2061	.2850
0.83	.2967	.7967	.2033	.2827
0.84	.2995	.7995	.2005	.2803
0.85	.3023	.8023	.1977	.2780
0.86	.3051	.8051	.1949	.2756
0.87	.3078	.8078	.1922	.2732
0.88	.3106	.8106	.1894	.2709
0.89	.3133	.8133	.1867	.2685
0.90	.3159	.8159	.1841	.2661
0.91	.3186	.8186	.1814	.2637
0.92	.3212	.8212	.1788	.2613
0.93	.3238	.8238	.1762	.2589
0.94	.3264	.8264	.1736	.2565
0.95	.3289	.8289	.1711	.2541
0.96	.3315	.8315	.1685	.2516
0.97	.3340	.8340	.1660	.2492
0.98	.3365	.8365	.1635	.2468
0.99	.3389	.8389	.1611	.2444

ادامهٔ جدول B

(1) z	(2) A سطح تا میانگین	(3) B سطح بزرگتر	(4) C سطح کوچکتر	(5) y ارتفاع
1.00	.3413	.8413	.1587	.2420
1.01	.3438	.8438	.1562	.2396
1.02	.3461	.8461	.1539	.2371
1.03	.3485	.8485	.1515	.2347
1.04	.3508	.8508	.1492	.2323
1.05	.3531	.8531	.1469	.2299
1.06	.3554	.8554	.1446	.2275
1.07	.3577	.8577	.1423	.2251
1.08	.3599	.8599	.1401	.2227
1.09	.3621	.8621	.1379	.2203
1.10	.3643	.8643	.1357	.2179
1.11	.3665	.8665	.1335	.2155
1.12	.3686	.8686	.1314	.2131
1.13	.3708	.8708	.1292	.2107
1.14	.3729	.8729	.1271	.2083
1.15	.3749	.8749	.1251	.2059
1.16	.3770	.8770	.1230	.2036
1.17	.3790	.8790	.1210	.2012
1.18	.3810	.8810	.1190	.1989
1.19	.3830	.8830	.1170	.1965
1.20	.3849	.8849	.1151	.1942
1.21	.3869	.8869	.1131	.1919
1.22	.3888	.8888	.1112	.1895
1.23	.3907	.8907	.1093	.1872
1.24	.3925	.8925	.1075	.1849
1.25	.3944	.8944	.1056	.1826
1.26	.3962	.8962	.1038	.1804
1.27	.3980	.8980	.1020	.1781
1.28	.3997	.8997	.1003	.1758
1.29	.4015	.9015	.0985	.1736
1.30	.4032	.9032	.0968	.1714
1.31	.4049	.9049	.0951	.1691
1.32	.4066	.9066	.0934	.1669
1.33	.4082	.9082	.0918	.1647
1.34	.4099	.9099	.0901	.1626
1.35	.4115	.9115	.0885	.1604
1.36	.4131	.9131	.0869	.1582
1.37	.4147	.9147	.0853	.1561
1.38	.4162	.9162	.0838	.1539
1.39	.4177	.9177	.0823	.1518
1.40	.4192	.9192	.0808	.1497
1.41	.4207	.9207	.0793	.1476
1.42	.4222	.9222	.0778	.1456
1.43	.4236	.9236	.0764	.1435
1.44	.4251	.9251	.0749	.1415
1.45	.4265	.9265	.0735	.1394
1.46	.4279	.9279	.0721	.1374
1.47	.4292	.9292	.0708	.1354
1.48	.4306	.9306	.0694	.1334
1.49	.4319	.9319	.0681	.1315

جدول A

دامنه‌های استیودنت‌شده معنی‌دار، برای آزمون جدید چند دامنه‌ای دونکن با $\alpha = 0/01$

df \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	14.04																	
3	8.261	8.321																
4	6.512	6.677	6.740															
5	5.702	5.893	5.989	6.040														
6	5.243	5.439	5.549	5.614	5.655													
7	4.949	5.145	5.260	5.334	5.383	5.416												
8	4.746	4.939	5.057	5.135	5.189	5.227	5.256											
9	4.596	4.787	4.906	4.986	5.043	5.086	5.118	5.142										
10	4.482	4.671	4.790	4.871	4.931	4.975	5.010	5.037	5.058									
11	4.392	4.579	4.697	4.780	4.841	4.887	4.924	4.952	4.975	4.994								
12	4.320	4.504	4.622	4.706	4.767	4.815	4.852	4.883	4.907	4.927	4.944							
13	4.260	4.442	4.560	4.644	4.706	4.755	4.793	4.824	4.850	4.872	4.889	4.904						
14	4.210	4.391	4.508	4.591	4.654	4.704	4.743	4.775	4.802	4.824	4.843	4.859	4.872					
15	4.168	4.347	4.463	4.547	4.610	4.660	4.700	4.733	4.760	4.783	4.803	4.820	4.834	4.846				
16	4.131	4.309	4.425	4.509	4.572	4.622	4.663	4.696	4.724	4.748	4.768	4.786	4.800	4.813	4.825			
17	4.099	4.275	4.391	4.475	4.539	4.589	4.630	4.664	4.693	4.717	4.738	4.756	4.771	4.785	4.797	4.807		
18	4.071	4.246	4.362	4.445	4.509	4.560	4.601	4.635	4.664	4.689	4.711	4.729	4.745	4.759	4.772	4.783	4.792	
19	4.046	4.220	4.335	4.419	4.483	4.534	4.575	4.610	4.639	4.665	4.686	4.705	4.722	4.736	4.749	4.761	4.771	4.780
20	4.024	4.197	4.312	4.395	4.459	4.510	4.552	4.587	4.617	4.642	4.664	4.684	4.701	4.716	4.729	4.741	4.751	4.761
24	3.956	4.126	4.239	4.322	4.386	4.437	4.480	4.516	4.546	4.573	4.596	4.616	4.634	4.651	4.665	4.678	4.690	4.700
30	3.889	4.056	4.168	4.250	4.314	4.366	4.409	4.445	4.477	4.504	4.528	4.550	4.569	4.586	4.601	4.615	4.628	4.640
40	3.825	3.988	4.098	4.180	4.244	4.296	4.339	4.376	4.408	4.436	4.461	4.483	4.503	4.521	4.537	4.553	4.566	4.579
60	3.762	3.922	4.031	4.111	4.174	4.226	4.270	4.307	4.340	4.368	4.394	4.417	4.438	4.456	4.474	4.490	4.504	4.518
120	3.702	3.858	3.965	4.044	4.107	4.158	4.202	4.239	4.272	4.301	4.327	4.351	4.372	4.392	4.410	4.426	4.442	4.456
∞	3.643	3.796	3.900	3.978	4.040	4.091	4.135	4.172	4.205	4.235	4.261	4.285	4.307	4.327	4.345	4.363	4.379	4.394

جدول B: سطح زیر منحنی نرمال

(1) z	(2) A	(3) B	(4) C	(5) y
	سطح تا میانگین	سطح بزرگتر	سطح کوچکتر	ارتفاع
0.00	.0000	.5000	.5000	.3989
0.01	.0040	.5040	.4960	.3989
0.02	.0080	.5080	.4920	.3989
0.03	.0120	.5120	.4880	.3988
0.04	.0160	.5160	.4840	.3986
0.05	.0199	.5199	.4801	.3984
0.06	.0239	.5239	.4761	.3982
0.07	.0279	.5279	.4721	.3980
0.08	.0319	.5319	.4681	.3977
0.09	.0359	.5359	.4641	.3973
0.10	.0398	.5398	.4602	.3970
0.11	.0438	.5438	.4562	.3965
0.12	.0478	.5478	.4522	.3961
0.13	.0517	.5517	.4483	.3956
0.14	.0557	.5557	.4443	.3951
0.15	.0596	.5596	.4404	.3945
0.16	.0636	.5636	.4364	.3939
0.17	.0675	.5675	.4325	.3932
0.18	.0714	.5714	.4286	.3925
0.19	.0753	.5753	.4247	.3918
0.20	.0793	.5793	.4207	.3910
0.21	.0832	.5832	.4168	.3902
0.22	.0871	.5871	.4129	.3894
0.23	.0910	.5910	.4090	.3885
0.24	.0948	.5948	.4052	.3876
0.25	.0987	.5987	.4013	.3867
0.26	.1026	.6026	.3974	.3857
0.27	.1064	.6064	.3936	.3847
0.28	.1103	.6103	.3897	.3836
0.29	.1141	.6141	.3859	.3825
0.30	.1179	.6179	.3821	.3814
0.31	.1217	.6217	.3783	.3802
0.32	.1255	.6255	.3745	.3790
0.33	.1293	.6293	.3707	.3778
0.34	.1331	.6331	.3669	.3765
0.35	.1368	.6368	.3632	.3752
0.36	.1406	.6406	.3594	.3739
0.37	.1443	.6443	.3557	.3725
0.38	.1480	.6480	.3520	.3712
0.39	.1517	.6517	.3483	.3697
0.40	.1554	.6554	.3446	.3683
0.41	.1591	.6591	.3409	.3668
0.42	.1628	.6628	.3372	.3653
0.43	.1664	.6664	.3336	.3637
0.44	.1700	.6700	.3300	.3621
0.45	.1736	.6736	.3264	.3605
0.46	.1772	.6772	.3228	.3589
0.47	.1808	.6808	.3192	.3572
0.48	.1844	.6844	.3156	.3555
0.49	.1879	.6879	.3121	.3538

SOURCE: A. L. Edwards. *Statistical Methods for the Behavioral Sciences*. New York: Hol Rinehart and Winston, 1954. Reprinted by permission of the publisher.

ادامهٔ جدول B

(1) z	(2) A سطح تا میانگین	(3) B سطح بزرگتر	(4) C سطح کوچکتر	(5) y ارتفاع
1.50	.4332	.9332	.0668	.1295
1.51	.4345	.9345	.0655	.1276
1.52	.4357	.9357	.0643	.1257
1.53	.4370	9370	.0630	.1238
1.54	.4382	.9382	.0618	.1219
1.55	.4394	.9394	.0606	.1200
1.56	.4406	.9406	.0594	.1182
1.57	.4418	.9418	.0582	.1163
1.58	.4429	.9429	.0571	.1145
1.59	.4441	.9441	.0559	.1127
1.60	.4452	.9452	.0548	.1109
1.61	.4463	.9463	.0537	.1092
1.62	.4474	.9474	.0526	.1074
1.63	.4484	.9484	.0516	.1057
1.64	.4495	.9495	.0505	.1040
1.65	.4505	.9505	.0495	.1023
1.66	.4515	.9515	.0485	.1006
1.67	.4525	.9525	.0475	.0989
1.68	.4535	.9535	.0465	.0973
1.69	.4545	.9545	.0455	.0957
1.70	.4554	.9554	.0446	.0940
1.71	.4564	.9564	.0436	.0925
1.72	.4573	.9573	.0427	.0909
1.73	.4582	.9582	.0418	.0893
1.74	.4591	.9591	.0409	.0878
1.75	.4599	.9599	.0401	.0863
1.76	.4608	.9608	.0392	.0848
1.77	.4616	.9616	.0384	.0833
1.78	.4625	.9625	.0375	.0818
1.79	.4633	.9633	.0367	.0904
1.80	.4641	.9641	.0359	.0790
1.81	.4649	.9649	.0351	.0775
1.82	.4656	.9656	.0344	.0761
1.83	.4664	.9664	.0336	.0748
1.84	.4671	.9671	.0329	.0734
1.85	.4648	.9678	.0322	.0721
1.86	.4686	.9686	.0314	.0707
1.87	.4693	.9693	.0307	.0694
1.88	.4699	.9699	.0301	.0681
1.89	.4706	.9706	.0294	.0669
1.90	.4713	.9713	.0287	.0656
1.91	.4719	.9719	.0281	.0644
1.92	.4726	.9726	.0274	.0632
1.93	.4732	.9732	.0268	.0620
1.94	.4738	.9738	.0262	.0608
1.95	.4744	.9744	.0256	.0596
1.96	.4750	.9750	.0250	.0584
1.97	.4756	.9756	.0244	.0573
1.98	.4761	.9761	.0239	.0562
1.99	.4767	.9767	.0233	.0551

ادامهٔ جدول B

(1) z	(2) A سطح تا میانگین	(3) B سطح بزرگتر	(4) C سطح کوچکتر	(5) y ارتفاع
2.00	.4772	.9772	.0228	.0540
2.01	.4778	.9778	.0222	.0529
2.02	.4783	.9783	.0217	.0519
2.03	.4788	.9788	.0212	.0508
2.04	.4793	.9793	.0207	.0498
2.05	.4798	.9798	.0202	.0488
2.06	.4803	.9803	.0197	.0478
2.07	.4808	.9808	.0192	.0468
2.08	.4812	.9812	.0188	.0459
2.09	.4817	.9817	.0183	.0449
2.10	.4821	.9821	.0179	.0440
2.11	.4826	.9826	.0174	.0431
2.12	.4830	.9830	.0170	.0422
2.13	.4834	.9834	.0166	.0413
2.14	.4838	.9838	.0162	.0404
2.15	.4842	.9842	.0158	.0396
2.16	.4846	.9846	.0154	.0387
2.17	.4850	.9850	.0150	.0379
2.18	.4854	.9854	.0146	.0371
2.19	.4857	.9857	.0143	.0363
2.20	.4861	.9861	.0139	.0355
2.21	.4864	.9864	.0136	.0347
2.22	.4868	.9868	.0132	.0339
2.23	.4871	.9871	.0129	.0332
2.24	.4875	.9875	.0125	.0325
2.25	.4878	.9878	.0122	.0317
2.26	.4881	.9881	.0119	.0310
2.27	.4884	.9884	.0116	.0303
2.28	.4887	.9887	.0113	.0297
2.29	.4890	.9890	.0110	.0290
2.30	.4893	.9893	.0107	.0283
2.31	.4896	.9896	.0104	.0277
2.32	.4898	.9898	.0102	.0270
2.33	.4901	.9901	.0099	.0264
2.34	.4904	.9904	.0096	.0258
2.35	.4906	.9906	.0094	.0252
2.36	.4909	.9909	.0091	.0246
2.37	.4911	.9911	.0089	.0241
2.38	.4913	.9913	.0087	.0235
2.39	.4916	.9916	.0084	.0229
2.40	.4918	.9918	.0082	.0224
2.41	.4920	.9920	.0080	.0219
2.42	.4922	.9922	.0078	.0213
2.43	.4925	.9925	.0075	.0208
2.44	.4927	.9927	.0073	.0203
2.45	.4929	.9929	.0071	.0198
2.46	.4931	.9931	.0069	.0194
2.47	.4932	.9932	.0068	.0189
2.48	.4934	.9934	.0066	.0184
2.49	.4936	.9936	.0064	.0180

ادامهٔ جدول B

(1) z	(2) A سطح تا میانگین	(3) B سطح بزرگتر	(4) C سطح کوچکتر	(5) y ارتفاع
2.50	.4938	.9938	.0062	.0175
2.51	.4940	.9940	.0060	.0171
2.52	.4941	.9941	.0059	.0167
2.53	.4943	.9943	.0057	.0163
2.54	.4945	.9945	.0055	.0158
2.55	.4946	.9946	.0054	.0154
2.56	.4948	.9948	.0052	.0151
2.57	.4949	.9949	.0051	.0147
2.58	.4951	.9951	.0049	.0143
2.59	.4952	.9952	.0048	.0139
2.60	.4953	.9953	.0047	.0136
2.61	.4955	.9955	.0045	.0132
2.62	.4956	.9956	.0044	.0129
2.63	.4957	.9957	.0043	.0126
2.64	.4959	.9959	.0041	.0122
2.65	.4960	.9960	.0040	.0119
2.66	.4961	.9961	.0039	.0116
2.67	.4962	.9962	.0038	.0113
2.68	.4963	.9963	.0037	.0110
2.69	.4964	.9964	.0036	.0107
2.70	.4965	.9965	.0035	.0104
2.71	.4966	.9966	.0034	0101
2.72	.4967	.9967	.0033	.0099
2.73	.4968	.9968	.0032	.0096
2.74	.4969	.9969	.0031	.0093
2.75	.4970	.9970	.0030	.0091
2.76	.4971	.9971	.0029	.0088
2.77	.4972	.9972	.0028	.0086
2.78	.4973	.9973	.0027	.0084
2.79	.4974	.9974	.0026	.0081
2.80	.4974	.9974	.0026	.0079
2.81	.4975	.9975	.0025	.0077
2.82	.4976	.9976	.0024	.0075
2.83	.4977	.9977	.0023	.0073
2.84	.4977	.9977	.0023	.0071
2.85	.4978	.9978	.0022	.0069
2.86	.4979	.9979	.0021	.0067
2.87	.4979	.9979	.0021	.0065
2.88	.4980	.9980	.0020	.0063
2.89	.4981	.9981	.0019	.0061
2.90	.4981	.9981	.0019	.0060
2.91	.4982	.9982	.0018	.0058
2.92	.4982	.9982	.0018	.0056
2.93	.4983	.9983	.0017	.0055
2.94	.4984	.9984	.0016	.0053
2.95	.4984	.9984	.0016	.0051
2.96	.4985	.9985	.0015	.0050
2.97	.4985	.9985	.0015	.0048
2.98	.4986	.9986	.0014	.0047
2.99	.4986	.9986	.0014	.0046

ادامهٔ جدول B

(1) z	(2) A سطح تا میانگین	(3) B سطح بزرگتر	(4) C سطح کوچکتر	(5) y ارتفاع
3.00	.4987	.9987	.0013	.0044
3.01	.4987	.9987	.0013	.0043
3.02	.4987	.9987	.0013	.0042
3.03	.4988	.9988	.0012	.0040
3.04	.4988	.9988	.0012	.0039
3.05	.4989	.9989	.0011	.0038
3.06	.4989	.9989	.0011	.0037
3.07	.4989	.9989	.0011	.0036
3.08	.4990	.9990	.0010	.0035
3.09	.4990	.9990	.0010	.0034
3.10	.4990	.9990	.0010	.0033
3.11	.4991	.9991	.0009	.0032
3.12	.4991	.9991	.0009	.0031
3.13	.4991	.9991	.0009	.0030
3.14	.4992	.9992	.0008	.0029
3.15	.4992	.9992	.0008	.0028
3.16	.4992	.9992	.0008	.0027
3.17	.4992	.9992	.0008	.0026
3.18	.4993	.9993	.0007	.0025
3.19	.4993	.9993	.0007	.0025
3.20	.4993	.9993	.0007	.0024
3.21	.4993	.9993	.0007	.0023
3.22	.4994	.9994	.0006	.0022
3.23	.4994	.9994	.0006	.0022
3.24	.4994	.9994	.0006	.0021
3.30	.4995	.9995	.0005	.0017
3.40	.4997	.9997	.0003	.0012
3.50	.4998	.9998	.0002	.0009
3.60	.4998	.9998	.0002	.0006
3.70	.4999	.9999	.0001	.0004

جدول C: توزیع t

	سطح معناداری آزمون یک دامنه			
	0.05	0.025	0.01	0.005
	سطح معناداری آزمون دو دامنه			
d.f.	0.10	0.05	0.02	0.01
1	6.314	12.706	31.821	63.657
2	2.920	4.303	6.965	9.925
3	2.353	3.182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.645	1.960	2.326	2.576

جدول D: ضریب همبستگی پیرسون
در سطح ۰/۰۵ و ۰/۰۱

d.f.	0.05	0.01
1	0.997	0.9999
2	0.950	0.990
3	0.878	0.959
4	0.811	0.917
5	0.754	0.874
6	0.707	0.834
7	0.666	0.798
8	0.632	0.765
9	0.602	0.735
10	0.576	0.708
11	0.553	0.684
12	0.532	0.661
13	0.514	0.641
14	0.497	0.623
15	0.482	0.606
16	0.468	0.590
17	0.456	0.575
18	0.444	0.561
19	0.433	0.549
20	0.423	0.537
21	0.413	0.526
22	0.404	0.515
23	0.396	0.505
24	0.388	0.496
25	0.381	0.487
26	0.374	0.479
27	0.367	0.471
28	0.361	0.463
29	0.355	0.456
30	0.349	0.449
32	0.339	0.436
34	0.329	0.424

d.f.	0.05	0.01
35	0.325	0.418
36	0.320	0.413
38	0.312	0.403
40	0.304	0.393
42	0.297	0.384
44	0.291	0.376
45	0.288	0.372
46	0.284	0.368
48	0.279	0.361
50	0.273	0.354
55	0.261	0.338
60	0.250	0.325
65	0.241	0.313
70	0.232	0.302
75	0.224	0.292
80	0.217	0.283
85	0.211	0.275
90	0.205	0.267
95	0.200	0.260
100	0.195	0.254
125	0.174	0.228
150	0.159	0.208
175	0.148	0.193
200	0.138	0.181
300	0.113	0.148
400	0.098	0.128
500	0.088	0.115
1,000	0.062	0.081

درجات آزادی صورت / درجات آزادی مخرج	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.02	1.98	1.95	1.90	1.85	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.55	1.52	1.48	1.46	1.44
	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.18	3.02	2.88	2.78	2.70	2.62	2.56	2.46	2.39	2.26	2.18	2.10	2.00	1.94	1.86	1.82	1.76	1.71	1.68
55	4.02	3.17	2.78	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.05	2.00	1.97	1.93	1.88	1.83	1.76	1.72	1.67	1.61	1.58	1.52	1.50	1.46	1.45	1.41
	7.12	5.01	4.16	3.68	3.37	3.15	2.98	2.85	2.75	2.66	2.59	2.53	2.43	2.35	2.23	2.15	2.06	1.96	1.90	1.83	1.78	1.71	1.66	1.64
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.86	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.50	1.48	1.44	1.41	1.39
	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	2.40	2.32	2.20	2.12	2.03	1.93	1.87	1.79	1.74	1.68	1.63	1.60
65	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.02	1.98	1.94	1.90	1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.57	1.54	1.49	1.46	1.42	1.39	1.37
	7.04	4.95	4.10	3.62	3.31	3.09	2.93	2.79	2.70	2.61	2.54	2.47	2.37	2.30	2.18	2.09	2.00	1.90	1.84	1.76	1.71	1.64	1.60	1.56
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.01	1.97	1.93	1.89	1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.56	1.53	1.47	1.45	1.40	1.37	1.35
	7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.91	2.77	2.67	2.59	2.51	2.45	2.35	2.28	2.15	2.07	1.98	1.88	1.82	1.74	1.69	1.62	1.56	1.53
80	3.96	3.11	2.72	2.48	2.33	2.21	2.12	2.05	1.99	1.95	1.91	1.88	1.82	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.45	1.42	1.38	1.35	1.32
	6.96	4.88	4.04	3.56	3.25	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.41	2.32	2.24	2.11	2.03	1.94	1.84	1.78	1.70	1.65	1.57	1.53	1.49
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.30	2.19	2.10	2.03	1.97	1.92	1.88	1.85	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.48	1.42	1.39	1.34	1.30	1.28
	6.90	4.82	3.98	3.51	3.20	2.99	2.82	2.69	2.59	2.51	2.43	2.36	2.26	2.19	2.06	1.98	1.89	1.79	1.73	1.64	1.59	1.51	1.46	1.43
125	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.95	1.90	1.86	1.83	1.77	1.72	1.65	1.60	1.55	1.49	1.45	1.39	1.36	1.31	1.27	1.25
	6.84	4.78	3.94	3.47	3.17	2.95	2.79	2.65	2.56	2.47	2.40	2.33	2.23	2.15	2.03	1.94	1.85	1.75	1.68	1.59	1.54	1.46	1.40	1.37
150	3.91	3.06	2.67	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.82	1.76	1.71	1.64	1.59	1.54	1.47	1.44	1.37	1.34	1.29	1.25	1.22
	6.81	4.75	3.91	3.44	3.14	2.92	2.76	2.62	2.53	2.44	2.37	2.30	2.20	2.13	2.00	1.91	1.83	1.73	1.66	1.56	1.51	1.43	1.37	1.33
200	3.89	3.04	2.65	2.41	2.26	2.14	2.05	1.98	1.92	1.87	1.83	1.80	1.74	1.69	1.62	1.57	1.52	1.45	1.42	1.35	1.32	1.26	1.22	1.19
	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.90	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.28	2.17	2.09	1.97	1.88	1.79	1.69	1.63	1.53	1.48	1.39	1.33	1.28
400	3.86	3.02	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.81	1.78	1.72	1.67	1.60	1.54	1.49	1.42	1.38	1.32	1.28	1.22	1.16	1.13
	6.70	4.66	3.83	3.36	3.06	2.85	2.69	2.55	2.46	2.37	2.29	2.23	2.12	2.04	1.92	1.84	1.74	1.64	1.57	1.47	1.42	1.28	1.24	1.19
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.10	2.02	1.95	1.89	1.84	1.80	1.76	1.70	1.65	1.58	1.53	1.47	1.41	1.36	1.30	1.26	1.19	1.13	1.08
	6.66	4.62	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34	2.26	2.20	2.09	2.01	1.89	1.81	1.71	1.61	1.54	1.44	1.38	1.28	1.19	1.11
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.69	1.64	1.57	1.52	1.46	1.40	1.35	1.28	1.24	1.17	1.11	1.00
	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.24	2.18	2.07	1.99	1.87	1.79	1.69	1.59	1.53	1.41	1.36	1.25	1.15	1.00



مهندس میلاد شمس‌الدین، متولد سال ۱۳۶۸، تحصیلات خود را در رشته مهندسی مواد- متالورژی صنعتی در دانشگاه علوم و تحقیقات تهران آغاز نمود. او تحصیلات خود را در رشته مهندسی مواد- متالورژی صنعتی با گرایش جوشکاری در دانشگاه صنعتی امیرکبیر ادامه داد و در سال ۱۳۹۲ موفق به اخذ مدرک کارشناسی ارشد در این رشته شد. زمینه تخصصی اصلی وی مهندسی سطح، مهندسی جوش، عملیات حرارتی، شبیه‌سازی رایانه‌ای و پلاسما است که در حوزه‌های اشاره شده دارای مقالات و فعالیت‌های پژوهشی متعددی می‌باشد. وی در حال حاضر مدرس دانشگاه جامع علمی- کاربردی می‌باشد.



محمدرضا شهبازمرادی، متولد سال ۱۳۶۸، تحصیلات دانشگاهی خود را در رشته اقتصاد نظری در دانشگاه علوم اقتصادی آغاز نمود. او تحصیلات خود را در رشته مدیریت در دانشگاه تهران ادامه داد و در سال ۱۳۹۳ موفق به اخذ مدرک کارشناسی ارشد در این رشته شد. زمینه تخصصی اصلی وی مدیریت (منابع انسانی، بازاریابی و استراتژی)، روش تحقیق و آمار است که در حوزه‌های اشاره شده دارای تألیفات و فعالیت‌های پژوهشی نیز می‌باشد. وی در حال حاضر دانشجوی دکترای سیاست‌گذاری دانشگاه علم و صنعت ایران می‌باشد.



مهندس فرزاد ملک محمدی، متولد سال ۱۳۶۴، تحصیلات خود را در رشته مهندسی مواد- متالورژی صنعتی در دانشگاه امیرکبیر آغاز نمود. او تحصیلات خود را در رشته مهندسی مواد- خوردگی و حفاظت مواد در دانشگاه تربیت مدرس ادامه داد و در سال ۱۳۸۸ موفق به اخذ مدرک کارشناسی ارشد در این رشته شد. زمینه تخصصی اصلی وی مهندسی سطح، مدل سازی خوردگی دمای پایین و طراحی سیستم های حفاظت کاتدیک است که در در حوزه‌های اشاره شده دارای مقالات و فعالیت‌های پژوهشی متعددی می‌باشد. وی در حال حاضر دانشجوی دکترای مهندسی مواد دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) قزوین و مدرس دانشگاه جامع علمی- کاربردی می‌باشد.