

فصل

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر



❖ اهداف آموزشی

- ❖ آشنایی با انواع معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر
- ❖ انواع معادلات خطی مرتبه دوم
- ❖ بررسی روش کاهش مرتبه
- ❖ بررسی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن و غیر همگن با ضرایب ثابت
- ❖ آشنایی با روش تغییر پارامترها
- ❖ آشنایی با کاربرد معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر
- ❖ آشنایی با حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از عملگر

□ مقدمه

در این فصل طریقه حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم را بیان می‌کنیم و روش حل را به مراتب بالاتر تعمیم می‌دهیم.

معادلات دیفرانسیل را به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم‌بندی می‌کنیم. همچنین معادلات خطی نیز خود به دو دسته معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب غیر ثابت (متغیر) تقسیم‌بندی می‌شوند.

□ معادلات خطی مرتبه دوم

هر معادله دیفرانسیل به صورت $y'' + p(x)y' + Q(x)y = R(x)$ را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم می‌گوییم. هرگاه $R(x) = 0$ باشد آنگاه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را همگن می‌نامیم و اگر $R(x) \neq 0$ باشد معادله را غیر همگن می‌نامند، معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی در فصل مقدمه معرفی شده است.

مثال: در زیر چند معادله دیفرانسیل خطی و غیر خطی را مشاهده می‌کنید.

$y'' + 5y' + x^2y = \sin x$	معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم
$y'' + xy y' + y = 5$	معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم

مثال: در زیر چند معادله دیفرانسیل خطی همگن و غیرهمگن را مشاهده می‌کنید.

$y'' + e^x y' + x^2 y = 0$	معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن
$y''' + 5xy' + x^2 y = \sin x$	معادله دیفرانسیل خطی مرتبه سوم غیرهمگن



معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن و غیر همگن با ضرایب ثابت کاربرد فراوانی در رشته‌های مختلف مهندسی و علوم دارد و لذا در این بخش روش حل این نوع معادلات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

□ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

تعریف: دو تابع y_1, y_2 را مستقل خطی نامیم هرگاه از رابطه $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$ نتیجه شود $C_1 = C_2 = 0$ به بیان دیگر دو تابع مستقل خطی هستند هرگاه یکی مضرب ثابتی از دیگری نباشند.

مثال: دو تابع $f(x) = e^x$ و $g(x) = xe^x$ مستقل خطی هستند.

قضیه: اگر y_1, y_2 دو جواب مستقل خطی برای معادله $y'' + ay' + by = 0$ باشد در این صورت برای هر دو عدد حقیقی C_1, C_2 ، $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ جواب عمومی معادله می‌باشد.

روش حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

شکل کلی این نوع معادلات به صورت $y'' + ay' + by = 0$ می‌باشد. اگر $y = e^{rx}$ جوابی از معادله باشد داریم: $y' = re^{rx}$ و $y'' = r^2 e^{rx}$. اگر در معادله به جای y, y', y'' توابع فوق را قرار دهیم، داریم:

$$r^2 e^{rx} + a r e^{rx} + b e^{rx} = 0 \rightarrow e^{rx} (r^2 + ar + b) = 0$$

چون $e^{rx} \neq 0$ پس باید داشته باشیم: $r^2 + ar + b = 0$.

معادله اخیر را معادله مشخصه (مفسر) می‌گویند. بر حسب ریشه‌های این معادله، جواب عمومی معادله دیفرانسیل را می‌توان مشخص کرد.

حالت اول: اگر $\Delta > 0$ آنگاه معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی و متمایز r_1, r_2 می‌باشد، بنابراین $y_1 = e^{r_1 x}$ ، $y_2 = e^{r_2 x}$ دو جواب مستقل خطی برای معادله می‌باشند پس بنابر قضیه جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \rightarrow y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + y' - 6y = 0$$

(حل)

$$r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow (r+3)(r-2) = 0 \rightarrow r_1 = -3$$

$$r_2 = 2$$



$$\Rightarrow y_1 = e^{r_1 x} = e^{-2x}$$

$$y_2 = e^{r_2 x} = e^{2x} \Rightarrow$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل مقابل را محاسبه کنید.

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$$r^2 + r - 2 = 0 \rightarrow (r+2)(r-1) = 0 \rightarrow r_1 = -2 \quad r_2 = 1$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x}$$

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ معادله دارای یک ریشه مضاعف و حقیقی مانند r می باشد، پس $y_1 = e^{rx}$ یک جواب معادله می باشد. برای به دست آوردن یک جواب مستقل خطی دیگر فرض می کنیم $y_2 = u e^{rx}$. با قرار دادن y_2, y_2', y_2'' در معادله مفسر، تابع $u = x$ حاصل می شود.

$$y'' + ay' + by = 0 \rightarrow r^2 + ar + b = 0 \xrightarrow{\Delta=0} r = -\frac{a}{2} \Rightarrow y_1 = y_2 = e^{-\frac{a}{2}x}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \rightarrow y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت زیر را پیدا کنید.

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

(حل)

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \rightarrow (r+2)^2 = 0 \rightarrow r = -2$$

$$\text{ریشه مضاعف} \quad r = -2$$

ریشه مضاعف شد لذا از فرمول $y = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$ استفاده کرده و ریشه را در آن جایگذاری می کنیم.

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$$

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ باشد یعنی از معادله مفسر $r^2 + ar + b = 0$, $\Delta = a^2 - 4b < 0$ شد معادله ریشه حقیقی ندارد، در این حالت معادله دارای هیچ ریشه به فرم e^{rx} نیست.

فصل

$$۲) \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

(حل)

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \rightarrow (r-1)^3 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$$

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{rx}$$

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$$

$$۳) \quad y'' + 8y' + 25y = 0$$

(حل) ابتدا معادله مفسر آن را پیدا کرده و Δ را محاسبه می‌کنیم.

$$r^2 + 8r + 25 = 0 \rightarrow \Delta = a^2 - 4b = 0 \Rightarrow \Delta = (8)^2 - 4(1)(25)$$

$$= 64 - 100 = -36 < 0$$

چون $\Delta < 0$ شد لذا دو ریشه متمایز مختلط دارد که آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-8 \pm (6i)}{2} = \begin{matrix} \nearrow 4 + 3i \\ \searrow 4 - 3i \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha = 4 \\ \beta = 3 \end{matrix}$$

جواب عمومی معادله در این حالت به صورت $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ خواهد بود که α, β را در آن جایگذاری می‌کنیم.

$$\boxed{y = e^{+4x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)}$$

$$۴) \quad y'' + y' - 6y = 0$$

(حل)

$$r^2 + r - 6 = 0 \rightarrow (r-2)(r+3) = 0 \rightarrow r_1 = 2 \quad r_2 = -3$$

$$\Delta > 0 \rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \rightarrow y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \rightarrow \boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}}$$

$$۵) \quad 4y'' + y = 0$$

(حل)

$$4r^2 + 1 = 0 \rightarrow 4r^2 = -1 \rightarrow r = \pm \frac{1}{2}i$$

چون $\Delta < 0$ است دارای دو ریشه مختلط متمایز است.



$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

$$y = e^{0x} (c_1 \cos \frac{1}{\sqrt{2}} x + c_2 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} x)$$

$$۶) \quad 4y'' - y = 0 \rightarrow$$

(حل)

$$4r^2 - 1 = 0 \rightarrow 4r^2 = 1 \rightarrow r^2 = \frac{1}{4} \rightarrow r = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \Delta > 0$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \rightarrow \boxed{y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}}$$

$$۷) \quad y^{\text{f}} - y'' = 0 \rightarrow$$

(حل)

$$r^{\text{f}} - r^{\text{r}} = 0 \rightarrow r^{\text{r}}(r^{\text{f}} - 1) = 0 \rightarrow r^{\text{r}} = 0 \rightarrow r = 0$$

$$r^{\text{r}} - 1 = 0 \rightarrow (r - 1)(r + 1) = 0 \rightarrow r = +1 \quad r = -1$$

$$\rightarrow \boxed{y = c_1 e^{0x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x}}$$

$$۸) \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

(حل) ابتدا معادله مشخصه را می‌نویسیم سپس Δ را محاسبه می‌کنیم.

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0$$

چون $\Delta < 0$ دو ریشه مختلط متمایز دارد

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 1 + 2i \\ \searrow 1 - 2i \end{matrix} \rightarrow \alpha = 1, \quad \beta = 2i$$

لذا جواب عمومی آن به صورت $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ به دست می‌آید.

$$\boxed{y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)}$$

مثال:

$$9) \quad y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$$

(حل)

$$r^3 - r^2 - 4r + 4 = 0 \rightarrow (r-1)(r^2 - 4) = 0 \rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = -2$$

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

$$10) \quad y''' + 2y'' + 4y' + 4y = 0$$

(حل) ابتدا معادله مشخصه معادله را می‌نویسیم.

$$r^3 + 2r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r^2(r+2) + 4(r+2) = 0$$

$$(r+2)(r^2 + 4) = 0 \Rightarrow r+2 = 0 \rightarrow r = -2$$

$$r^2 + 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2i \quad \Rightarrow \quad r_1 = -2$$

$$\alpha = 0$$

$$B = 2$$

$$y = c_1 e^{r_1 x} + e^{\alpha x} (c_2 \cos Bx + c_3 \sin Bx)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$$

**تمرین‌های بخش معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت**

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت زیر را محاسبه کنید.

۱) $y'' - y = 0$

۲) $y'' + 4y = 0$

۳) $y'' + 2y' + 4y = 0$

۴) $9y'' - 6y' + y = 0$

۵) $y'' + 6y' + 8y = 0$

۶) $y''' + y'' + 8y' - 10y = 0$

۷) $y'' + y' + 2y = 0$

۸) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

۹) $y''' - y' = 0$

□ روش کاهش مرتبه

در این روش یک معادله دیفرانسیل خطی مفروض را به یک معادله خطی که مرتبه آن یک واحد کمتر است تبدیل می‌کنیم.

اگر یک جواب، یک معادله خطی مرتبه دوم همگن در دست باشد با روشی که به روش کاهش مرتبه است می‌توان جواب غیر صفر دیگری از آن را به دست آورد. برای تشریح این روش، فرض کنید $y = y_1(x)$ جواب غیر صفر معادله همگن باشد.

جواب دیگری برای معادله همگن $y'' + ay' + by = 0$ به شکل $y_2 = v(x)y_1(x)$ که $v(x)$ تابعی مجهول است، به دست می‌آوریم. با قرار دادن این جواب در معادله بالا خواهیم داشت:

$$y_1 v'' + (2y_1' + p(x)y_1)v' = 0$$

$$v'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right)v' = 0$$

$$\frac{v''}{v'} = -\frac{2y_1'}{y_1} - p(x)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا به دست می‌آوریم: $\ln|v'| = -2\ln|y_1| - \int p(x)dx$ و از

$$v' = \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p(x)dx\right)$$

می‌کنیم داریم:

$$v(x) = \int \left[\frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p(x)dx\right)\right] dx$$

چون $y_2 = vy_1$ پس: $y_2 = y_1 \int \left[\frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p(x)dx\right)\right] dx$ به دست می‌آید که به رابطه *

فرمول آبل می‌گویند، توجه داشته باشیم چون v' صفر نیست پس $v(x)$ تابع ثابت نبوده و لذا جواب‌های y_1 و y_2 مستقل خطی‌اند.

مثال: با توجه به اینکه $y_1 = x$ جوابی از معادله $x^2 y'' + xy' - y = 0$ است جواب عمومی معادله دیفرانسیل را به دست می‌آوریم.

حل) ابتدا معادله را به صورت زیر درمی‌آوریم:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$



چون $p(x) = \frac{1}{x}$ ، جواب دیگری که مستقل خطی از اولی باشد به صورت $y_2 = v y_1$ است که در آن از فرمول $v(x)$ استفاده کرده و در * قرار می‌دهیم جواب دوم هم به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \\ &= \int x^{-2} \cdot e^{-\ln x} dx = \int x^{-2} \cdot e^{\ln x^{-1}} dx = \int x^{-2} \cdot x^{-1} dx \\ &= \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c \end{aligned}$$

$$y_2 = v y_1 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{2x^2} \times x = -\frac{1}{2x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت $y = C_1 x + C_2 x^{-1}$ می‌باشد.

مثال: با توجه به اینکه $y_1 = x$ جوابی از معادله $x^2 y'' - xy' + y = 0$ ، $x > 0$ ، است جواب عمومی معادله دیفرانسیل را به دست می‌آوریم:

حل: با توجه به اینکه $y_1 = x$ یک جواب معادله است، جواب دیگری برای معادله از فرمول آبل به دست می‌آوریم. معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم.

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

$$\text{داریم: } \int p dx = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln x, \quad p(x) = -\frac{1}{x}$$

$$y_2 = x \int \left(\frac{1}{x^2} e^{\ln x} dx = x \ln x + c \right. \quad \text{بنابراین}$$

پس جواب عمومی معادله $y = C_1 x + C_2 x \ln x$ خواهد بود.

مثال: نشان دهید که $y_1 = x^2$ یک جواب معادله $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ می‌باشد، جواب عمومی معادله را بیابید.

حل: معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم. $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = 0$. از آن v را پیدا می‌کنیم.

$$v(x) = \int \left(\frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} \right) dx$$

$$v(x) = \int \left(\frac{1}{(x^r)^r} e^{-\int \frac{1}{x} dx} \right) dx = \int \frac{1}{x^r} e^{-\ln x} dx$$

$$v = \int x^{-r} \cdot x^{-1} dx = \int x^{-\Delta} dx = \frac{x^{-\Delta}}{-\Delta} + c$$

حال v را در $y_1 = v y_1$ جایگذاری می‌کنیم.

$$y_r = \frac{x^{-r}}{-r} \times x^r$$

$$y_r = -\frac{1}{r x^r} \quad \Leftrightarrow y_r = -\frac{1}{r x^r} \times x^r$$

در نتیجه جواب عمومی معادله برابر خواهد بود با:

$$y = c_1 y_1 + c_r y_r$$

$$y = c_1 x^r - \frac{1}{r} - c_r x^{-r}$$

مثال: نشان دهید $y_1 = x$ یک جواب معادله $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ می‌باشد. جواب عمومی معادله را پیدا کنید.

$$\text{حل) طرفین معادله را بر } (x-1) \text{ تقسیم می‌کنیم } y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = 0$$

$$V \text{ را از فرمول } v = \int \left(\frac{1}{y_1} e^{-\int p(x) dx} \right) dx \text{ به دست آورده}$$

$$\text{و در فرمول } v = \int \left(\frac{1}{x^r} e^{-\int \frac{x}{x-1} dx} \right) dx \text{ جایگذاری می‌کنیم و } y_r = e^x \text{ پیدا می‌شود و جواب}$$

$$\text{عمومی } y = c_1 y_1 + c_r y_r \text{ برابر است با } y = c_1 x + c_r e^x$$