

رابطه‌های دوتایی



❖ اهداف آموزشی

- ❖ آشنایی با رابطه‌های دوتایی و خواص مربوط به آن
- ❖ آشنایی با گراف روابط
- ❖ بررسی ماتریس‌های نمایش‌دهنده روابط
- ❖ آشنایی با عمل‌های بولی
- ❖ بررسی ترکیب دو رابطه
- ❖ بررسی روابط سازگاری و هم‌ارزی
- ❖ آشنایی با معادل رابطه متقارن
- ❖ شناخت ترابابی (تعدی) و بستار ترابابی
- ❖ آشنایی با الگوریتم وارشال
- ❖ بررسی رابطه‌های هم‌ارزی و دسته‌های هم‌ارزی
- ❖ شناخت تابع معکوس و ضابطه آن

□ مقدمه

تعریف: فرض کنید A و B دو مجموعه‌اند. حاصلضرب دکارتی A در B که با نماد $A \times B$ نشان می‌دهیم عبارت است از:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

مثال: اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{a, b, c\}$ در این صورت $A \times B$ ، $B \times A$ و $A \times A$ را مشخص کنید.

(حل)

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

نکته: اگر A دارای m عضو و B دارای n عضو باشد، آنگاه $A \times B$ دارای mn عضو است.

تعریف: یک رابطه دوتایی یا به اختصار یک رابطه مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هاست. به عبارت دقیق‌تر هر گاه A و B ، زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است.

یک رابطه از A به A را یک رابطه روی A می‌گوییم.

نامگذاری: فرض کنید R یک رابطه از A به B است. اگر $(a, b) \in R$ در این صورت می‌گوییم a

با b رابطه R دارد و آن را به صورت aRb می‌نویسیم، اگر $(a, b) \notin R$ ، می‌نویسیم $a \not R b$.

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{4, 5\}$ در این صورت:

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

تعدادی از رابطه‌های A به B در زیر آورده شده است.

$$R_1 = \{(1, 4), (1, 5)\} \quad R_2 = \{(1, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$R_3 = \{(1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 4)\}$$



مثال: روی $\mathbb{Z}$ رابطه R را چنین تعریف می‌کنیم aRb هر گاه $a - b$ مضرب γ است در این صورت مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} \mid xR3\}$ را مشخص کنید.

حل: $xR3$ یعنی $x - 3$ مضرب γ است. پس $xR3$ یعنی $x - 3 = \gamma k$ در نتیجه

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid xR3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 3 = \gamma k\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \gamma k + 3\}$$

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ ، $p(A)$ مجموعه کلیه زیرمجموعه‌های A است. رابطه R را روی $p(A)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

برای هر $X, Y \in p(A)$ هر گاه XY ، $X \subset Y$ اگر $x = \{3\}$ ، $y = \{2, 3\}$ ، $z = \{1, 3\}$

در این صورت گزاره xRy درست است. زیرا $x \subset y$ چون $Y \not\subset Z$ پس YR/Z .

تعریف: فرض کنید R_1 و R_2 دو رابطه از A به B باشند در این صورت:

الف) اجتماع R_1 و R_2 عبارت است از:

$$R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ or } (x, y) \in R_2\}$$

ب) اشتراک R_1 و R_2 عبارت است از:

$$R_1 \cap R_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ and } (x, y) \in R_2\}$$

ج) اگر R یک رابطه از A به B باشد وارون R به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

مثال: وارون رابطه $R = \{(1, 1), (1, 6), (5, 1), (5, 8), (7, 2)\}$ عبارت است از:

$$R^{-1} = \{(1, 1), (6, 1), (1, 5), (8, 5), (2, 7)\}$$

تعریف: فرض کنید R_1 رابطه‌ای از A به B و R_2 رابطه‌ای از B به C است. $R_1 \circ R_2$ رابطه‌ای از A به C است که آن را ترکیب R_1 با R_2 می‌گویند و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(a, c) \in R_1 \circ R_2 \text{ هر گاه } b \text{ ای در } B \text{ باشد به طوری که } (a, b) \in R_1, (b, c) \in R_2$$

برای به دست آوردن عضوهای $R_1 \circ R_2$ ، یک زوج مرتب (x, y) در R_1 اختیار می‌کنیم، اگر

زوج مرتبی به شکل (y, z) در R_2 باشد، آنگاه (x, z) عضوی از $R_1 \circ R_2$ است.

مثال: فرض کنید $A = \{2, 3, 8, 9\}$ ، $B = \{4, 6, 18\}$ ، $C = \{1, 4, 7, 9\}$ فرض کنید S رابطه عاد

کردن از A به B باشد، اگر R رابطه «کوچکتر یا مساوی» از B به C باشد. در این صورت ROS را مشخص کنید.



حل) در واقع اگر $a \in A$, $b \in B$ باشد، $(a, b) \in R$ هر گاه $a \leq b$ اگر $b \in B$ و $c \in C$ باشد، $(a, c) \in S$ هر گاه $a \mid c$.

$$R = \{(4, 4), (4, 7), (4, 9), (6, 7), (6, 9)\}$$

$$S = \{(2, 4), (2, 6), (2, 18), (3, 6), (3, 18), (9, 18)\}$$

$$(2, 4) \in S, (4, 4) \in R \Rightarrow (2, 4) \in ROS$$

$$(2, 4) \in S, (4, 7) \in R \Rightarrow (2, 7) \in ROS$$

$$(2, 4) \in S, (4, 9) \in R \Rightarrow (2, 9) \in ROS$$

$$(2, 6) \in S, (6, 7) \in R \Rightarrow (2, 7) \in ROS$$

$$(2, 6) \in S, (6, 9) \in R \Rightarrow (2, 9) \in ROS$$

$$(3, 6) \in S, (6, 7) \in R \Rightarrow (3, 7) \in ROS$$

$$(3, 6) \in S, (6, 9) \in R \Rightarrow (3, 9) \in ROS$$

$$ROS = \{(2, 4), (2, 7), (2, 9), (3, 7), (3, 9)\}$$

بنابراین

□ خواص ترکیب دو رابطه

۱- ترکیب رابطه‌ها، شرکت‌پذیر است. یعنی اگر R_1 رابطه‌ای از A به B و R_2 رابطه‌ای از B به C و R_3 رابطه‌ای از C به D باشد، آنگاه:

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

۲- اگر R رابطه‌ای از A به B و S رابطه‌ای از B به C باشد، آنگاه $(SOR)^{-1} = R^{-1}OS^{-1}$

توجه: فرض کنید R یک رابطه روی A است. ROR را با R^2 نمایش می‌دهیم. به طور کلی تعریف می‌کنیم:

$$R^1 = R \dots R^2 = ROR \dots R^3 = R^2OR \dots R^{n+1} = R^nOR$$

مثال: فرض کنید $R = \{(1, 1), (3, 1), (2, 3), (4, 2)\}$ در این صورت R^2 و R^3 و R^4 را به دست آورید.

حل)

$$R^2 = \{(1, 1), (3, 1), (2, 1), (4, 3)\}$$

$$R^3 = \{(1, 1), (3, 1), (2, 1), (4, 1)\}$$

$$R^4 = \{(1, 1), (3, 1), (2, 1), (4, 1)\}$$

چون $R^2 = ROR$ ، پس

چون $R^3 = R^2OR$ ، پس

چون $R^4 = R^3OR$ ، پس

بنابراین $R^4 = R^3$.

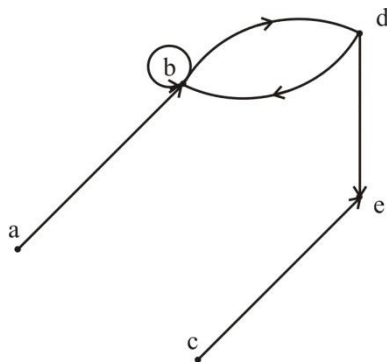


□ گراف روابط

فرض کنید A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه روی A است. عضوهای A را به عنوان رأس می‌گیریم. اگر xRy (یعنی $(x, y) \in R$) آنگاه x را با یک پیکان به y متصل می‌کنیم و اگر xRx آنگاه x را با یک طوقه به خود x وصل می‌کنیم. به این ترتیب گراف جهت‌داری به دست می‌آید.

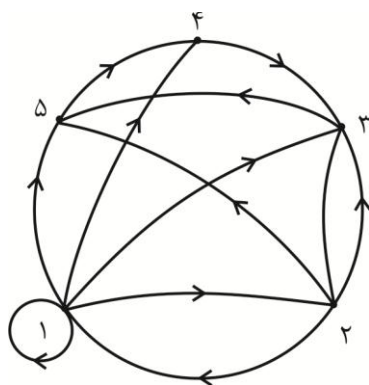
مثال: فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e\}$ و رابطه R روی A به صورت زیر:

$$R = \{(a, b), (b, b), (b, d), (c, e), (d, b), (d, e)\}$$



تعریف شده است. گراف جهت‌دار R را رسم کنید.
حل چون $(b, b) \in R$ ، پس از b به خود b یک طوقه وجود دارد. چون $(a, b) \in R$ ، پس یک یال جهت‌دار (پیکان) از a به b رسم کرده‌ایم، چون $(b, d) \in R$ و $(d, b) \in R$ ، پس از b به d و از d به b دو یال جهت‌دار رسم کرده‌ایم. به همین ترتیب از d به e و از c به e یال‌های جهت‌داری رسم کرده‌ایم، زیرا $(d, e) \in R$ و $(c, e) \in R$.

مثال: روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، رابطه R را به صورت $R = \{(a, b) \mid a \mid b+1\}$ تعریف می‌کنیم. گراف جهت‌دار R را رسم کنید.

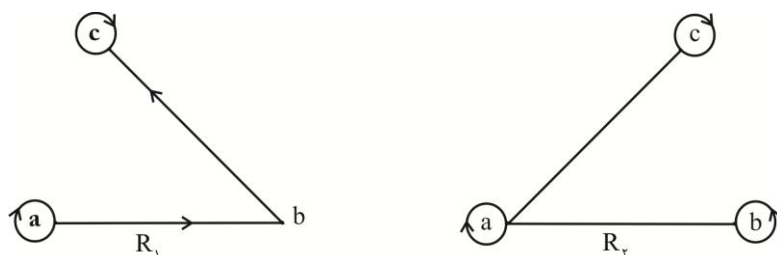


حل چون ۱، همه اعداد را می‌شمارد (عاد می‌کند)، پس $(1, 1) \in R$ ، $(1, 2) \in R$ ، $(1, 3) \in R$ ، $(1, 4) \in R$ و $(1, 5) \in R$. چون $2 \mid 1+1$ ، $2 \mid 3+1$ ، $2 \mid 5+1$ ، پس $(2, 1) \in R$ و $(2, 3) \in R$ و $(2, 5) \in R$. چون $3 \mid 2+1$ ، $3 \mid 4+1$ ، پس $(3, 2) \in R$ و $(3, 4) \in R$. چون $4 \mid 3+1$ ، پس $(4, 3) \in R$. چون $5 \mid 4+1$ ، پس $(5, 4) \in R$ در نتیجه:

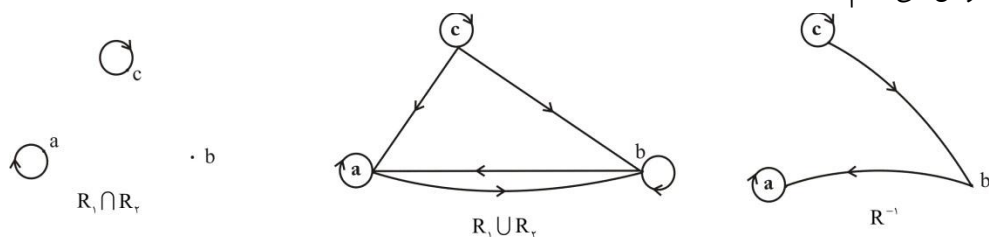
$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 4)\}$$

بنابراین گراف جهت‌دار R به صورت زیر است.

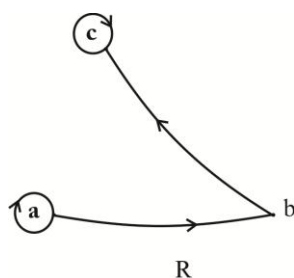
مثال: رابطه‌های R_1 و R_2 روی $A = \{a, b, c\}$ با گراف‌های جهت‌دار زیر تعریف شده‌اند. گراف‌های جهت‌دار $R_1 \cup R_2$ ، $R_1 \cap R_2$ و R_1^{-1} را رسم کنید.



حل) گراف جهت‌دار $R_1 \cap R_2$ ، متشکل از یال‌های جهت‌داری است که در هر دو گراف وجود دارند. گراف جهت‌دار $R_1 \cup R_2$ ، متشکل از یال‌های جهت‌داری است که یا در R_1 و یا در R_2 قرار دارند. برای به دست آوردن گراف جهت‌دار وارون R_1 ، جهت پیکان‌ها را در یال‌های R_1 عوض می‌کنیم.



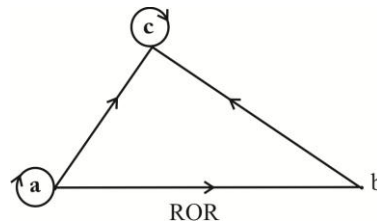
مثال: گراف جهت‌دار یک رابطه R روی $A = \{a, b, c\}$ در شکل زیر داده شده است. گراف جهت‌دار $R \circ R$ را به دست آورید.



حل) گراف جهت‌دار $R \circ R$ ، متشکل از یال‌های جهت‌داری است که از متصل کردن دو مرحله‌ای عناصر مجموعه A به دست می‌آیند. مثلاً از a به c یک یال جهت‌دار در $R \circ R$ وجود دارد، زیرا در



R یک یال جهت‌دار از a به b و یک یال جهت‌دار از b به c وجود دارد. یک یال جهت‌دار از a به b در ROR وجود دارد، زیرا یک یال از a به a و یک یال جهت‌دار از a به b در R وجود دارد. به همین ترتیب از b و c یک یال جهت‌دار در ROR وجود دارد. واضح است که طوقه‌های a به a و c به c نیز که در R وجود دارد در ROR نیز قرار دارد. پس گراف جهت‌دار ROR به صورت زیر است.



□ ماتریس‌های نمایش‌دهنده روابط

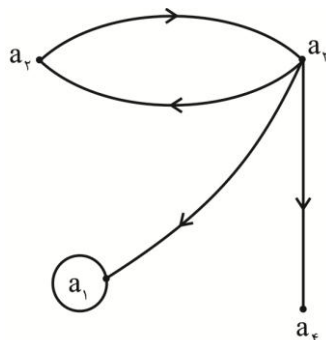
تعریف: فرض کنید R یک رابطه روی $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ است. ماتریس $M_R = [m_{ij}]_{n \times n}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } (a_i, a_j) \in R \\ 0 & \text{اگر } (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

ماتریس M_R را ماتریس متناظر به رابطه R می‌گوییم.

مثال: فرض کنید $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و R رابطه‌ای است که گراف جهت‌دار آن در شکل زیر رسم شده است. ماتریس متناظر به این رابطه را بنویسید.

حل) ماتریس متناظر به رابطه R یک ماتریس 4×4 به صورت زیر است:



$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

توجه کنید که چون $(a_1, a_1) \in R$ پس $m_{11} = 1$ نیز $(a_2, a_2) \in R$ و $(a_3, a_3) \in R$ پس $m_{22} = 1$ و $m_{33} = 1$ از آنجا که $(a_1, a_4) \notin R$ پس $m_{14} = 0$. به همین ترتیب در بقیه موارد عمل می‌کنیم.

تعریف: ماتریس بولی ماتریسی است که درایه‌هایش فقط از صفر یا یک تشکیل شده باشد. بنابراین ماتریس متناظر به هر رابطه، یک ماتریس صفر - یک است.

□ عمل‌های بولی

روی مجموعه $\{0, 1\}$ دو عمل $\vee$ و $\wedge$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$0 \wedge 0 = 0, \quad 0 \wedge 1 = 0, \quad 1 \wedge 0 = 0, \quad 1 \wedge 1 = 1$$

$$0 \vee 0 = 0, \quad 0 \vee 1 = 1, \quad 1 \vee 0 = 1, \quad 1 \vee 1 = 1$$

$$1 \vee 1 = 1 \quad 1 \wedge 1 = 1$$

$$1 \vee 0 = 1 \quad 1 \wedge 0 = 0$$

$$0 \vee 1 = 1 \quad 0 \wedge 1 = 0$$

$$0 \vee 0 = 0 \quad 0 \wedge 0 = 0$$

تعریف: اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ دو ماتریس بولی باشند، آنگاه $A \odot B$ به صورت

زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \odot B = [c_{ij}]_{m \times p}$$

که در آن:

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{in} \wedge b_{nj})$$

$A \odot B$ را ضرب بولی ماتریس‌های A و B می‌گوییم.



مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ در این صورت؛

$$\begin{aligned} A \odot B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تعریف: فرض کنید A یک ماتریس مربعی بولی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$A^{(0)} = I$$

$$A^{(1)} = A$$

$$\vdots$$

$$A^{(m)} = A^{(m-1)} \odot A$$

■ اشتراک و اجتماع ماتریس‌های بولی (صفر - یک)

تعریف: فرض کنید $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ماتریس‌های بولی باشند.

الف) اشتراک A و B که با نماد $A \wedge B$ نمایش داده می‌شود، یک ماتریس بولی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \wedge B = [a_{ij} \wedge b_{ij}]_{m \times n}$$

ب) اجتماع ماتریس‌های A و B به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \vee B = [a_{ij} \vee b_{ij}]_{m \times n}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشند، آنگاه؛

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 1 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 1 \\ 0 \wedge 1 & 0 \wedge 0 & 0 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 \vee 1 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 0 \vee 1 & 0 \vee 0 & 0 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف:

الف) فرض M_S, M_R به ترتیب ماتریس‌های دو رابطه S و R باشند $M_{R \cup S}$ و $M_{R \cap S}$ به ترتیب ماتریس‌های اجتماع و اشتراک این دو رابطه باشند، آنگاه $M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$ و $M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$.

ب) فرض کنید M_R ماتریس رابطه R و $M_{R^{-1}}$ ماتریس وارون R باشد. در این صورت:

$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T$$

مثال: رابطه R و S روی $A = \{1, 2, 3\}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\} \quad \text{و} \quad S = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$M_{R \cup S}, M_{R^{-1}}, M_{R \cap S}, M_{R \cup S}$ را بیابید.

حل)

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R \cap S} = M_S \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□ ماتریس ترکیب دو رابطه

توجه: فرض کنید R یک رابطه از A به B و S یک رابطه از B به C است در این صورت M_{ROS} ، ماتریس ترکیب S با R برابر است با:

$$M_{ROS} = M_S \wedge M_R$$

مثال: فرض کنید $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ و $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ و رابطه‌های R و S به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\} \quad S = \{(b_1, c_1), (b_2, c_1), (b_2, c_2), (b_3, c_2)\}$$



مطلوب است محاسبه M_{SOR} و $M_R \odot M_S$.

حل) چون $SOR = \{(a_1, c_1), (a_1, c_2), (a_1, c_3), (a_2, c_1), (b_3, c_3)\}$ پس؛

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{SOR} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که $M_{SOR} = M_R \odot M_S$.

مثال: اگر $R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,3)\}$ ، در این صورت ماتریس متناظر با رابطه R^r را به دست آورید.

حل) ماتریس رابطه R عبارت است از $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ بنابراین؛

$$M_{R^r} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^r} = [M_R]^{(r)} = [M_R]^{(r)} \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□ روابط سازگاری و هم‌ارزی

تعریف: اگر R یک رابطه روی مجموعه A باشد، در این صورت R روی A بازتابی (انعکاسی) است، هر گاه به ازای هر $x \in A$ ، داشته باشیم $(x, x) \in R$ بنابراین رابطه R روی A بازتابی است. هر گاه گراف جهت‌دار R در هر رأس، دارای یک طوقه باشد.

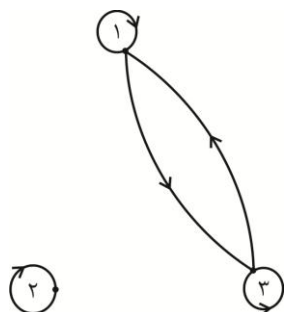
مثال: رابطه R در مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ به صورت زیر تعریف شده است. به ازای هر xRy ، $xy \in A$ هر گاه $x|y$ زوج باشد. نشان دهید R بازتابی است.



حل) اگر رابطه R را با زوج مرتب‌هایش بنویسیم، داریم:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$$

بنابراین R بازتابی است. زیرا به ازای هر $x \in A$ زوج (x, x) در R است. از روی گراف جهت‌دار R که در شکل زیر رسم شده نیز می‌توان دید که R بازتابی است.



مثال: رابطه «کوچکتر یا مساوی» در مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه اعداد صحیح، مجموعه اعداد گویا و حقیقی یک رابطه بازتابی است. زیرا گزاره « $a \leq a$ » به ازای هر عدد حقیقی درست است.

مثال: رابطه عاد کردن «شمردن» یعنی « xRy هر گاه $x \mid y$ » در مجموعه اعداد طبیعی یک رابطه بازتابی است، زیرا به ازای هر عدد طبیعی a داریم $a \mid a$.

آزمون: رابطه $R = \{(x, y) \mid xy > 0\}$ روی کدام یک از مجموعه‌های زیر بازتابی است؟

$$(1) \mathbb{R} \quad (2) \mathbb{R} - \{0\} \quad (3) \mathbb{R} - \{1\} \quad (4) \mathbb{R} - \{2\}$$

حل) گزینه ۲ صحیح است، زیرا اگر x یک عدد حقیقی غیر صفر باشد، آنگاه $x \cdot x = x^2 > 0$ ، پس به ازای هر عدد حقیقی غیر صفر x ، xRx ، رابطه R روی سایر مجموعه‌ها بازتابی نیست، زیرا $(0, 0) \notin R$.

توجه: (۱) اگر R_1 و R_2 روی A بازتابی باشند، آنگاه $R_1 \cup R_2$ روی A بازتابی است.

(۲) اگر R_1 و R_2 روی A بازتابی باشند، آنگاه $R_1 \cap R_2$ روی A بازتابی است.

(۳) اگر R روی A بازتابی باشد، آنگاه R^{-1} روی A بازتابی است.

مثال: رابطه R روی مجموعه اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده است.

$$xRy \text{ هر گاه } 2y + 3x = 5, \text{ آیا } R \text{ بازتابی است؟}$$

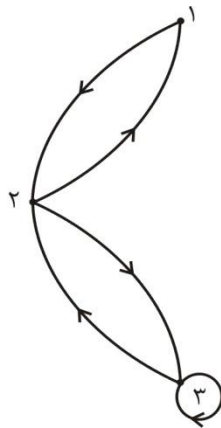
حل) R بازتابی نیست، زیرا مثلاً زوج مرتب $(2, 2)$ در R نیست.

مثال: نشان دهید ترکیب یک رابطه بازتابی با خودش رابطه‌ای بازتابی است.

فرض کنید R روی A بازتابی است. نشان می‌دهیم $R \circ R$ بازتابی است. برای این کار فرض کنید x عضو دلخواهی از A است، چون $(x, x) \in R$ و $(x, x) \in R$ پس $(x, x) \in R \circ R$ در نتیجه $R \circ R$ بازتابی است.



توجه: اگر A دارای n عضو باشد، تعداد رابطه‌های بازتابی که روی A می‌توان تعریف کرد برابر با 2^{n^2-n} .



تعریف: رابطه R را متقارن می‌گوییم هر گاه $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$. بنابراین یک رابطه متقارن است. هر گاه در گراف جهت‌دار متناظر با آن، اگر از رأس a به رأس b یک یال جهت‌دار وجود داشته باشد، آنگاه از رأس b به رأس a نیز یال جهت‌داری موجود باشد.

مثال: رابطه $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ یک رابطه متقارن است. به گراف جهت‌دار متناظر با رابطه R که در شکل زیر رسم شده، توجه کنید.

□ تعریف معادل برای رابطه متقارن

رابطه R روی A متقارن است اگر و تنها اگر $R^{-1} = R$

توجه: اگر R یک رابطه دلخواه روی A باشد، آنگاه $R \cup R^{-1}$ و $R \cap R^{-1}$ متقارند.

مثال: اگر R_1 و R_2 دو رابطه متقارنند، پس $R_1^{-1} = R_1$ و $R_2^{-1} = R_2$ خواهد بود.

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$$

$$(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1} = R_1 \cap R_2$$

مثال: روی $A = \{1, 2, 3\}$ چند رابطه متقارن می‌توان نوشت؟

حل) چون ماتریس متناظر با یک رابطه متقارن، یک ماتریس متقارن است و به عکس هر ماتریس متقارن صفر - یک، ماتریس یک رابطه متقارن است. پس باید تعداد ماتریس‌های متقارن 3×3 با درایه‌های صفر و یک را شمرد، در یک ماتریس 3×3 ، شش درایه، بالای قطر یا روی قطر اصلی است که هر کدام مقدار صفر یا یک را می‌گیرد.

بنابراین تعداد ماتریس‌های متقارن صفر - یک از مرتبه ۳ برابر است با $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$.

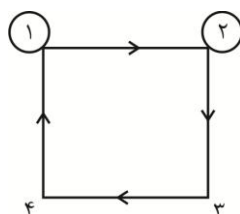
توجه: به طریق مشابه تعداد رابطه‌های متقارن روی یک مجموعه n عضوی برابر است با $2^{\frac{n^2+n}{2}}$.

■ رابطه تراییبی (تعدی)

رابطه R تراییبی می‌گوییم هر گاه، اگر $(a, b) \in R$ ، $(b, c) \in R$ ، آنگاه $(a, c) \in R$ خواهد بود.



بنابراین یک رابطه ترایابی است، هر گاه در گراف جهت‌دار متناظرش، اگر از a به b یک یال جهت‌دار و از b به c یک یال جهت‌دار باشد، آنگاه از a به c نیز یک یال جهت‌دار موجود باشد. مثال: گراف جهت‌دار یک رابطه R در شکل زیر رسم شده است. آیا رابطه R ترایابی است؟



حل) رابطه R ترایابی نیست، زیرا $(3, 4) \in R$ و $(2, 3) \in R$ ولی $(2, 4) \notin R$.

■ نکاتی در مورد رابطه ترایابی (تعدی)

۱- رابطه R ترایابی نیست، هر گاه حداقل دو زوج (a, b) و (b, c) در R موجود باشد به طوری که $(a, c) \notin R$.

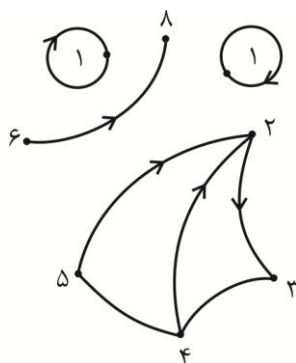
۲- هر رابطه تک عضوی و رابطه $\emptyset$ ترایابی هستند.

۳- برای بررسی خاصیت ترایابی در یک رابطه، فقط زوج‌هایی به صورت (a, b) و (b, c) را که $a \neq b$ و $b \neq c$ در نظر می‌گیریم.

مثال: آیا رابطه $R = \{(1, 1), (7, 7), (2, 3), (6, 8), (4, 5), (5, 2), (4, 2), (4, 3)\}$ یک رابطه ترایابی است.

حل) گراف جهت‌دار این رابطه در شکل زیر رسم شده است.

چون $(5, 2) \in R$ و $(2, 3) \in R$ ولی $(5, 3) \notin R$ پس رابطه مزبور ترایابی نیست.



توجه: هر یک از رابطه‌های کوچکتر مساوی، عاد کردن و زیرمجموعه بودن، رابطه ترایابی می‌باشند.



توجه: الف) اگر R ترایابی باشد، آنگاه R^{-1} ترایابی است.

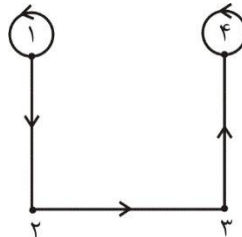
ب) اگر R_1 و R_2 ترایابی باشند، آنگاه $R_1 \cap R_2$ ترایابی است. ولی در حالت کلی $R_1 \cup R_2$ ترایابی نیست.

تعریف: رابطه R روی یک مجموعه A پادمتقارن گوئیم هر گاه:

$$a \neq b, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$$

به عبارت دیگر، رابطه R روی A پادمتقارن است، هر گاه $(a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$

مثال: رابطه $R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 4), (2, 3)\}$ پادمتقارن است، گراف جهت‌دار رابطه R در شکل زیر رسم شده است.



توجه ۱: رابطه R روی A پادمتقارن است هر گاه $R \cap R^{-1} \subset i_A$ که در آن i_A رابطه همانی روی A است.

توجه ۲: اگر R پادمتقارن باشد، آنگاه R^{-1} پادمتقارن است.

توجه ۳: اگر R_1 و R_2 پادمتقارن باشند آنگاه $R_1 \cap R_2$ پادمتقارن است ولی در حالت کلی $R_1 \cup R_2$ پادمتقارن نیست.

■ تشخیص نوع یک رابطه از ماتریس متناظر با آن رابطه

۱) رابطه R بازتابی است هر گاه همه درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس متناظر با آن ۱ باشد.

۲) رابطه R متقارن است هر گاه ماتریس متناظر با آن متقارن باشد، یعنی $M_R = (M_R)^T$

۳) رابطه R پادمتقارن است هر گاه حداقل یکی از درایه‌های (i, j) ام یا (j, i) ام ماتریس متناظر با آن صفر باشد: $j \neq i$.

مثال: با توجه به ماتریس M_R نوع رابطه R را مشخص کنید.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$